الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement scientifique

Et de la recherche scientifique

جامعة أحمد بن يحي الونشريسي

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان :

الرياضيات I : دروس وتمارين

موجهة لطلبة السنة الأولى علوم اقتصادية جذع مشترك

من اعداد الدكتور : باريك مراد

السنة الجامعية 2021-2022

فهرس المحتويات:

الموضوع	الصفحة
المقدمة	01
الفصل الأول	
المتتاليات العددية	
تعاريف	03
اتجاه تغيرات متتالية	04
المتتاليات المحدودة	06
تقارب وتباعد متتالية	07
المتتالية الحسابية	14
المتتالية الهندسية	17
المتتالية الحسابية و الهندسية في أن واحد	19
تمارين محلولة	21
الفصل الثاني	
السلاسل العددية	
تعاريف	34
سلاسل شهيرة	35
السلسلة الهندسية	35
سلسلة leibniz	35
سلسلة ريمان	36
سلاسل Alembert	36
سلاسل كوشي	37
تمارين محلولة	39

الفصل الثالث

النهايات و الاستمرارية

الدوال 43

النهايات 45

الاستمرارية عند نقطة 48

نظرية القيم المتوسطة 49

الفصل الرابع

الاشتقاق

الاشتقاق عند نقطة 52

عمليات على المشتقات 54

مشتقات بعض الدوال 54

تمارين محلولة 56

الفصل الخامس

التكامل

الدالة الأصلية 62

دوال أصلية شهيرة 62

التكامل المحدود 65

التكامل بالتجزئة 66

التكامل بتبديل المتغير 68

تمارين محلولة 69

الفصل السادس

الدالة الأسية

تعاريف 77

خصائص الدالة الأسية 77

دراسة تغيرات الدالة الأسية 78
الدالة الأصلية للدالة الأسية 81
تمارين محلولة 82

الفصل السابع

الدالة اللوغاريتمية

تعاريف 88
خصائص الدالة اللوغاريتمية 88
دراسة تغيرات الدالة اللوغاريتمية 89
نهايات شهيرة 90
الدالة الأصلية للدالة اللوغاريتمية 91
تمارين محلولة 92
المراجع 100

المقدمة

مقدمة :

يعتبر التحليل الرياضي أحد أهم فروع الرياضيات ، حيث تعتمد على مبادئه باقي فروعها كالجبر الخطي ، الهندسة ، الرياضيات التطبيقية ، بحوث العمليات و الاحصاء و الاحتمالات . كما أن تطبيقاته لا غنى عليها في العلوم الفيزيائية ، الكيميائية ، العلوم الطبية ،العلوم البيولوجية ، العلوم الجيولوجية و الفضائية و خاصة العلوم الاقتصادية والمالية .

فالاقتصاد الحديث يتطلب الالمام بكل جوانب الرياضيات بما فيها المبادئ الأساسية في التحليل الرياضي ، وحصول أغلب الباحثين الاقتصاديين المتخصصين في الاقتصاد القياسي والرياضيات التطبيقية في هذا الجانب خير دليل على أهمية الرياضيات و مبادئ التحليل الرياضي في علم الاقتصاد و المالية .

فتخصص الطالب في العلوم الاقتصادية يتطلب و يتوجب منه التوفر و امتلاك الشروط الأساسية في الرياضيات و التي نجدها عموما في فرع التحليل الرياضي . لهذا كان الهدف من هذه المطبوعة تقديم أساسيات مبادئ التحليل الرياضي لطلاب السنة الأولى في العلوم الاقتصادية. لتكون لهم سند و دعم في فهم باقي الدروس التقنية و التي لها علاقة بالرياضيات خلال مشوارهم الدراسي . فنجد على سبيل المثال أن الاقتصاد الجزئي يتطلب الإلمام بمفاهيم الاشتقاق و التكامل حتى يتم الانتقال مثلا من الدوال الحدية للتكاليف والانتاج الى الدوال الكلية للتكاليف و الانتاج من خلال التكامل و الرجوع عكسا من خلال الاشتقاق . كما أن الرياضيات المالية تعتمد بصورة كبيرة على فهم المتتاليات و السلاسل العددية .

لهذا ارتأينا تقسيم هذه المطبوعة في التحليل الرياضي الى سبعة (07) فصول أساسية ، كل فصل يتبع بسلسلة تمارين متعلقة به ، فصول تتميز بالبساطة و العمق في أن واحد و البرهان حينما نراه متطلبا حتى يتسنى للطالب الفهم سريعا .

المقدمة

الفصل الأول كان عبارة عن مدخل للمتتاليات العددية حيث تم التعرض فيه خاصة لخاصية التقارب و التباعد للمتتاليات العددية بالإضافة للمتتاليات الحسابية و الهندسية .

الفصل الثاني تم التعرض للسلاسل العددية و التي تعتبر كتتمة للفصل السابق حيث تم التعرض لأهم السلاسل العددية وخاصية تقاربها بدءا من السلسلة الهندسية ، سلاسل ريمان ، كوشي و سلاسل بارترونـد .

في **الفصل الثالث** تم التطرق للتوابع المستمرة و النهايات ، أما **الفصل الرابع** فكان عبارة عن دراسة الاشتقاق و أهم القواعد المتعلقة به .

الفصل الخامس كان لابد من عرض أهم القوانين المتعلقة بالتكامل و حساب الدوال الأصلية .علما أن كل فصل مرفق بمجموعة من التمارين التطبيقية . وحتى يستفيد طلبتنا أكثر سوف نقوم بإصدار كتاب يدعم هذه المطبوعة ويكملها ، كما سوف نقوم باتباعها بمطبوعة لبرنامج الفصل الثاني تتناول موضوع الجبر الخطي .

الفصل السادس تناولنا فيه الدالة الأسية **و الفصل السابع** تعرضنا للدالة اللوغاريتمية و أهم مميزاتها .

الفصل الأول : المتتاليات العددية

I. تعاريف :

1. تعريف 1 : المتتالية هي كل تطبيق[1] من مجموعة البدء E نحو مجموعة الوصول F ونكتب :

$$\mathbb{U}: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$$

$$n \to \mathbb{U}(n)$$

ملاحظة :

- $\mathrm{E} = \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية).
- اذا كانت $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ نقول أن المتتالية $\mathbb{U}_n$ متتالية عددية .
- نسمي U_n حدود المتتالية $\mathbb{U}$.
- نسمي n مؤشر حدود المتتالية $\mathbb{U}$.

مثال : يمكن اعتبار الأعداد الفردية متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$\mathbb{U}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n \to 2n + 1$$

$$\mathbb{U}_0 = 1; \mathbb{U}_1 = 3; \mathbb{U}_2 = 5; \mathbb{U}_3 = 7 \ldots\ldots$$

يمكن اعتبار الأعداد الزوجية متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$\mathbb{U}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n \to 2n$$

$$\mathbb{U}_0 = 0; \mathbb{U}_1 = 2; \mathbb{U}_2 = 4; \mathbb{U}_3 = 6 \ldots\ldots$$

2. تعريف 2 : هناك طريقتان لتعريف متتالية عددية :

---

[1] التطبيق كل عنصر من البدء E له صورة واحدة في مجموعة الوصول F

- **التعريف الصريح** : نقول أن المتتالية $\mathbb{U}_n$ معرفة تعريفا صريحا اذا كانت بدلالة المؤشر n ونكتب :

$$\forall n \in \mathbb{N}: \mathbb{U}_n = f(n)$$

مثال :

$\mathbb{U}_n = 2n + 1;\ \mathbb{U}_n = n^2\ ; \mathbb{U}_n = \sqrt{n}$ ... ...

- **التعريف بالتراجع** : **نقول عن المتتالية** $\mathbb{U}_n$ أنها معرفة بعلاقة تراجعية اذا وفقط اذا كان :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}; \exists \mathrm{k}, \mathrm{p} \in \mathbb{N}^*: \mathbb{U}_{\mathrm{n+p}} = \mathrm{f}\left(\mathbb{U}_{\mathrm{n+p-k}}\right)$$

حيث p : درجة العلاقة التراجعية مع العلم أن $k < p$.

اذا كان $p = 1$ نكتب : $\mathbb{U}_{\mathrm{n+1}} = \mathrm{f}(\mathbb{U}_{\mathrm{n}})$

مثال (**1**) :

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 1 \\ \mathbb{U}_{\mathrm{n+1}} = \sqrt{\mathbb{U}_{\mathrm{n}} + 1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{U}_1 = \sqrt{\mathbb{U}_0 + 1} \\ \mathbb{U}_2 = \sqrt{\mathbb{U}_1 + 1} \\ \mathbb{U}_3 = \sqrt{\mathbb{U}_2 + 1} \end{cases}$$

مثال (**2**) :

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 0 \\ \mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n + 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_0 + 3 = 0 + 3 = 3 \\ \mathbb{U}_2 = \mathbb{U}_1 + 3 = 3 + 3 = 6 \\ \mathbb{U}_3 = \mathbb{U}_2 + 3 = 6 + 3 = 9 \end{cases}$$

II. اتجاه تغيرات متتالية عددية :(دراسة رتابة متتالية)

1. تعريف : اذا كانت $\mathbb{U}_n$ معرفة بالصيغة الصريحة : $\forall n \in \mathbb{N}: \mathbb{U}_n = f(n)$ ، في هذه الحالة نقوم بدراسة تغيرات الدالة $f(x)$. حينئذ نقول أن :

- $\mathbb{U}_n = f(n)$ أو $f(x)$ متزايدة اذا كان $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) > 0$ و/أ $\mathrm{f}'(n) > 0$.
- $\mathbb{U}_n = f(n)$ أو $f(x)$ متناقصة اذا كان $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) < 0$ و/أ $\mathrm{f}'(n) < 0$.

- $\mathbb{U}_n = f(n)$ أو $f(x)$ ثابتة اذا كان $f'(x) = 0$ أو $f'(n) = 0$.

مثال : نعرف المتتالية $\mathbb{U}_n$ كما يلي :

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 1 \\ \mathbb{U}_n = n^2 - 3n + 2 \end{cases}$$

أدرس رتابة $\mathbb{U}_n$ ؟

نضع : $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 2x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow 2x - 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 1/4$$

$\mathbb{U}_n$ متزايدة تماما $\Leftrightarrow \forall n \in N: n > 3/2$.

$\mathbb{U}_n$ مناقصة تماما $\Leftrightarrow \forall n \in N: n < 3/2$.

$\mathbb{U}_n$ ثابتة $\Leftrightarrow \forall n \in N: n = 3/2$.

2. تعريف : اذا كانت $\mathbb{U}_n$ معرفة من خلال العلاقة التراجعية $\mathbb{U}_{n+p} = f(\mathbb{U}_{n+p-k})$ حينئذ نقوم بدراسة اشارة المقدار $\mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n$ ونقول أن :

- $\mathbb{U}_n$ متزايدة اذا كان : $\forall n \in N: \mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n \geq 0 \Leftrightarrow \mathbb{U}_{n+1} \geq \mathbb{U}_n$
- $\mathbb{U}_n$ متزايدة تماما اذا كان : $\forall n \in N: \mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n > 0 \Leftrightarrow \mathbb{U}_{n+1} > \mathbb{U}_n$
- $\mathbb{U}_n$ متناقصة اذا كان : $\forall n \in N: \mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n \leq 0 \Leftrightarrow \mathbb{U}_{n+1} \leq \mathbb{U}_n$
- $\mathbb{U}_n$ متناقصة تماما اذا كان : $\forall n \in N: \mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n \leq 0 \Leftrightarrow \mathbb{U}_{n+1} \leq \mathbb{U}_n$

مثال : نعرف المتتالية $\mathbb{U}_n$ كما يلي :

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 1 \\ \mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n^2 - \mathbb{U}_n + 1 \end{cases}$$

$$\forall \mathbf{n} \in \mathbf{N}: \mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_n^2 - \mathbb{U}_n + 1 - \mathbb{U}_n = (\mathbb{U}_n - 1)^2$$

$$\Longrightarrow \forall \mathbf{n} \in \mathbf{N}: \mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n \geq 0$$

اذن $\mathbb{U}_n$ متزايدة .

III. المتتاليات المحدودة:

1. تعريف :

- نقول عن المتتالية U_n أنها محدودة من الأعلى ب M :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N} : \mathbb{U}_\mathrm{n} \leq \mathrm{M}$$

- نقول عن المتتالية U_n أنها محدودة من الأسفل ب m :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N} : \mathbb{U}_\mathrm{n} \geq \mathrm{m}$$

- نقول عن المتتالية $\mathbb{U}_n$ أنها محدودة اذا وفقط اذا كان :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N} : \mathrm{n} \leq \mathbb{U}_\mathrm{n} \leq \mathrm{M} \Leftrightarrow |\mathbb{U}_\mathrm{n}| \leq \mathrm{M}$$

مثال سابق : نعرف المتتالية $\mathbb{U}_n$ كما يلي :

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 1 \\ \mathbb{U}_\mathrm{n} = \mathrm{n}^2 - 3\mathrm{n} + 2 \end{cases}$$

من خلال دراسة تغيرات الدالة $f(n) = n^2 - 3n + 2$ نجد أن :

$$\mathrm{f}(0) = \mathbb{U}_0 = 1 \text{ و } \mathrm{f}\left(\frac{3}{2}\right) = 1/4$$

اذن : $\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}: \mathbb{U}_\mathrm{n} \geq 1/4$

نقول حينئذ أن : $\mathbb{U}_n$ محدودة من الأسفل ب ¼ .

IV. تقارب و تباعد متتالية :

1. تعريف : نقول عن متتالية $\mathbb{U}_n$ أنها متقاربة اذا كانت تقبل نهاية $l \in R$ ونكتب :

$\mathbb{U}_n$ متقاربة $\Leftrightarrow \lim_{n\to+\bowtie} \mathbb{U}_n = l$

أو نكتب :

$\mathbb{U}_n$ متقاربة $\Leftrightarrow \exists l \in R, \forall \mathcal{E} > 0, \exists n_0 \in N, n \geq n_0 \Rightarrow |\mathbb{U}_n - l| < \mathcal{E}$

- $\mathbb{U}_n$ ليست متقاربة $\Leftrightarrow \mathbb{U}_n$ متباعدة
- $\mathbb{U}_n$ متزايدة و محدودة من الأعلى $\Leftarrow \mathbb{U}_n$ متقاربة .
- $\mathbb{U}_n$ متناقصة و محدودة من الأسفل $\Leftarrow \mathbb{U}_n$ متقاربة .

مثال : لتكن $\mathbb{U}_n$ متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية :

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 2 \\ \mathbb{U}_{n+1} = \sqrt{2\mathbb{U}_n - 1} \end{cases}$$

أثبت أن U_n متقاربة ثم أحسب نهايتها .

الحل : لدينا

$$\mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n = \sqrt{2\mathbb{U}_n - 1} - \mathbb{U}_n = \frac{2\mathbb{U}_n - 1 - \mathbb{U}_n{}^2}{\sqrt{2\mathbb{U}_n - 1} + \mathbb{U}_n} = \frac{-(\mathbb{U}_n - 1)^2}{\sqrt{2\mathbb{U}_n - 1} + \mathbb{U}_n}$$

لدينا : $\mathbb{U}_n > 0 \; ; \sqrt{2\mathbb{U}_n - 1} > 0 \Rightarrow \sqrt{2\mathbb{U}_n - 1} + \mathbb{U}_n > 0$

$$\Rightarrow \mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n \leq 0$$

$\mathbb{U}_n$ متناقصة .

- $\mathbb{U}_n$ متناقصة و محدودة من الأسفل ب 0 ، $(\mathbb{U}_n > 0) \Leftarrow \mathbb{U}_n$ متقاربة .

$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{U}_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{U}_n = l \Leftrightarrow$ متقاربة $\mathbb{U}_n$

$$l = \sqrt{2l-1} \Leftrightarrow$$
$$l^2 - 2l + 1 = (l-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$l = 1$$

مثال 2 :

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = -1 \\ \mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n^2 + 11\mathbb{U}_n + 25 \end{cases}$$

$$\mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_n^2 + 11\mathbb{U}_n + 25 - \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_n^2 + 10\mathbb{U}_n + 25 = (\mathbb{U}_n + 5)^2 \geq 0$$

اذن $\mathbb{U}_n$ متزايدة .

نفرض أن U_n متقاربة $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{U}_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{U}_n = l \Leftrightarrow$

$$\Longrightarrow l = l^2 + 11l + 25 \Longrightarrow (l+5)^2 = 0 \Longrightarrow l = -5$$

لكن $U_0 = -1$ و U_n متزايدة $l = -5$ مرفوض $\Longleftarrow \mathbb{U}_n$ متباعدة .

2. **خواص** :

- نسمي مجموع متتاليتين عدديتين U_n و $\mathbb{V}_n$ المتتالية $\mathbb{S}_n$ حيث : $\mathbb{S}_n = \mathbb{U}_n + \mathbb{V}_n$.
- نسمي ضرب متتاليتين عدديتين U_n و $\mathbb{V}_n$ المتتالية $\mathbb{P}_n$ حيث : $\mathbb{P}_n = \mathbb{U}_n * \mathbb{V}_n$.
- اذا كان $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{U}_n = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}_n = 0$ فان $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{S}_n = 0$.
- اذا كان $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{U}_n = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}_n = l$ فان $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_n = 0$.
- اذا كانت $\mathbb{V}_n$ متقاربة نحو 0 وكانت $|\mathbb{U}_n| \leq |\mathbb{V}_n|$ فان $\mathbb{U}_n$ متقاربة نحو 0.

3. **بعض العمليات على المتتاليات المتقاربة** :اذا كانت $\mathbb{U}_n$ و $\mathbb{V}_n$ متتاليتين متقاربتين .حيث $n = \mathbb{U}_n + \mathbb{V}_n$ و $\mathbb{P}_n = \mathbb{U}_n * \mathbb{V}_n$ فان :

- $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{U}_n = l$ و $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}_n = l' \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{S}_n = l + l'$.

- $\lim_{n\to+\bowtie} \mathbb{U}_n = l$ و $\lim_{n\to+\bowtie} \mathbb{V}_n = l' \Longrightarrow \lim_{n\to+\bowtie} \mathbb{P}_n = l * l'$.
- $\lim_{n\to+\bowtie} \mathbb{U}_n = l \Longrightarrow \lim_{n\to+\bowtie} \lambda\mathbb{U}_n = \lambda l ./\lambda \in R$.
- $\lim_{n\to+\bowtie} \mathbb{U}_n = l \Longrightarrow \lim_{n\to+\bowtie} |\mathbb{U}_n| = |l|$.
- $\lim_{n\to+\bowtie} \mathbb{U}_n = l \Longrightarrow \lim_{n\to+\bowtie} \frac{1}{\mathbb{U}_n} = \frac{1}{l} / l \neq 0$.
- $\lim_{n\to+\bowtie} \mathbb{U}_n = l$ و $\lim_{n\to+\bowtie} \mathbb{V}_n = l' \Longrightarrow \lim_{n\to+\bowtie} \frac{\mathbb{U}_n}{\mathbb{V}_n} = \frac{l}{l'} / l' \neq 0$.
- $l \leq l' \Longrightarrow \mathbb{U}_n \leq \mathbb{V}_n$.

مثال :

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 4 \\ \mathbb{U}_{n+1} = \sqrt{5\mathbb{U}_n + 10} \end{cases}$$

- إذا كانت $\mathbb{U}_n$ متقاربة، أحسب نهايتها l.
- برهن بالتراجع على أنه : $\forall n \in N : \mathbb{U}_n \leq l$
- أثبت أن $\mathbb{U}_n$ متزايدة ثم استنتج تقاربها؟

نضع:
$$\begin{cases} \mathbb{P}_n = \sqrt{5\mathbb{U}_n + 10} * \frac{1}{n} \\ \mathbb{S}_n = \sqrt{5\mathbb{U}_n + 10} + \frac{n}{n+1} \end{cases}$$

أحسب نهاية $\mathbb{S}_n$ و $\mathbb{P}_n$

الحل: $\mathbb{U}_n$ متقاربة $\Leftrightarrow \lim_{n\to+\bowtie} \mathbb{U}_n = \lim_{n\to+\bowtie} \mathbb{U}_{n+1} = l$

$$\Rightarrow l = \sqrt{5l + 10} > 0 \Rightarrow l^2 + 5l - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} l_1 = \frac{5 - \sqrt{65}}{2} \\ l_2 = \frac{5 + \sqrt{65}}{2} \end{cases}$$

l_1 مرفوض لأن $l = \sqrt{5l + 10} > 0$ ومنه فان : $l = \frac{5+\sqrt{65}}{2}$

تذكير بالبرهان بالتراجع : اذا كانت لدينا قضية $P(n)$ متعلقة بالعدد الطبيعي n فانه اذا كان :

- $P(0)$ صحيحة
- $\forall k \in N : P(k)$ صحيحة $\Longrightarrow P(k+1)$ صحيحة

نقول حينئذ أن القضية $P(n)$ قضية صحيحة من أجل $n \geq 0$

- اثبات أن : $\forall n \in N : \mathbb{U}_n \leq l = \frac{5+\sqrt{65}}{2}$

نضع : $P(n): \mathbb{U}_n \leq \frac{5+\sqrt{65}}{2}$

من أجل $n = 0$: $P(0): \mathbb{U}_0 = 4 \leq \frac{5+\sqrt{65}}{2}$ صحيحة

نفرض أن $P(k): \mathbb{U}_k \leq \frac{5+\sqrt{65}}{2}$ صحيحة ونبرهن أن $P(k+1): \mathbb{U}_{k+1} \leq \frac{5+\sqrt{65}}{2}$.

$$\mathbb{U}_k \leq \frac{5+\sqrt{65}}{2} \Longrightarrow 5\mathbb{U}_k \leq 5\left(\frac{5+\sqrt{65}}{2}\right) \Longrightarrow 5\mathbb{U}_k + 10 \leq 5\left(\frac{5+\sqrt{65}}{2}\right) + 10$$

$$\Longrightarrow \sqrt{5\mathbb{U}_k + 10} \leq 6.530 \leq l = 6.5311$$

$$\Longrightarrow \mathbb{U}_{k+1} \leq l = \frac{5+\sqrt{65}}{2}$$

اذن $\forall n \in N : \mathbb{U}_n \leq l$ صحيحة .

اثبات أن $\mathbb{U}_n$ متزايدة :

$$\mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n = \sqrt{5\mathbb{U}_n + 10} - \mathbb{U}_n = \frac{5\mathbb{U}_n + 10 - {\mathbb{U}_n}^2}{\sqrt{5\mathbb{U}_n + 10} + \mathbb{U}_n}$$

لندرس اشارة المقدار $-{\mathbb{U}_n}^2 + 5\mathbb{U}_n + 10$ لأن $\sqrt{5\mathbb{U}_n + 10} + \mathbb{U}_n \geq 0$.

		$\frac{5-\sqrt{65}}{2}$	$\frac{5+\sqrt{65}}{2}$	
$\mathbb{U}_n$	$-\infty$			$+\infty$
$\mathbb{U}_{n+1}-\mathbb{U}_n$	−	+	+	−

سابقا لدينا : $0<\mathbb{U}_n\leq\frac{5+\sqrt{65}}{2}\Leftarrow\mathbb{U}_{n+1}-\mathbb{U}_n\geq 0\Leftarrow\mathbb{U}_n$ متزايدة .

$\mathbb{U}_n$ متزايدة و محدودة من الأعلى و $\mathrm{U}_n\leq\frac{5+\sqrt{65}}{2}$ فهي متقاربة .

- $\lim_{n\to+\bowtie}\mathbb{S}_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{5\mathbb{U}_n+10}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{5+\sqrt{65}}{2}+1.$
- $\lim_{n\to+\bowtie}\mathbb{P}_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{5\mathbb{U}_n+10}*\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{5+\sqrt{65}}{2}*0=0$

خاصية : اذا كانت الدالة $f(n)$ دالة متناقصة ، فان الدالة المعرفة كما يلي : $g(n)=f(f(n))$

هي دالة متزايدة .

مثال: لتكن المتتالية $\mathbb{U}_n$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases}\mathbb{U}_0=1\\ \mathbb{U}_{n+1}=\dfrac{1}{1+\mathbb{U}_n}\end{cases}$$

- اثبت أن $f(x)=\frac{1}{1+x}$ متناقصة على المجال $]-1,+\infty[$.
- أثبت $f(x)>0$ على المجال $]-1,+\infty[$.
- نضع $g(x)=f(f(x))$ ، أعطي $g(x)$ ثم أثبت أنها متزايدة .
- نضع

$$\begin{cases}\mathbb{V}_0=1\\ \mathrm{V}_{n+1}=\mathrm{g}(\mathbb{V}_n)\end{cases}$$

- بين أن $\mathrm{V}_n\geq\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

- بين أن V_nمتناقصة تماما على المجال $]-1,+\infty[$.
- استنتج تقارب U_n و $\mathbb{V}_n$.

الحل : $f(x)=\frac{1}{1+x}$ مجال تعريف f هو $R-\{-1\}$ $\Longleftarrow$

$$\Longrightarrow \forall x \in R-\{-1\}: f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}<0$$

اذن $f(x)$ متناقصة تماما على المجال $]-1,+\infty[$.

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=0 \\ f(x)^{\downarrow}(\text{متناقصة})\end{cases} \Longrightarrow \forall x\in\,]-1,+\infty[\,: f(x)>0$$

- $f(x)\neq -1 : f(x)>0 \Longrightarrow g\big(f(x)\big)$موجودة.

$$\Longrightarrow g(x)=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{2+x}$$

من الخاصية السابقة : اذا كانت f متناقصة فان $g(x)=f(f(x))$ تكون متزايدة .

x	-1	$+\infty$
$g'(x)=\frac{3}{(x+2)^2}$		$+$
$g(x)$	0	1

اثبات أن : $\forall n \in N: \mathbb{V}_n \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

بالبرهان بالتراجع نجد : $\mathrm{P}(0): \mathrm{V}_0 = 1 > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ صحيحيه من أجل $n = 0$.

نفرض أن $P(n): \forall n \in N: \mathbb{V}_n \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ صحيحة ونبرهن أن

$P(n+1): \forall n \in N: \mathbb{V}_{n+1} \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ صحيحة .

g متزايدة $\Longleftarrow$ $g(\mathbb{V}_n) \geq g(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ لأن $\mathbb{V}_n \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\Longrightarrow g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \mathrm{f}\left(\mathrm{f}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right) = \mathrm{f}\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{V}_{n+1} \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

اذن $\forall n \in N: \mathbb{V}_n \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\mathbb{V}_n$ متناقصة $\Longleftrightarrow \mathbb{V}_{n+1} - \mathbb{V}_n \leq 0$

$$\mathbb{V}_{n+1} - \mathbb{V}_n = \frac{1+\mathbb{V}_n}{2+\mathbb{V}_n} - \mathbb{V}_n = \frac{-\mathbb{V}_n^2 - \mathbb{V}_n + 1}{2+\mathbb{V}_n}$$

x	-1	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$+\infty$
w $\mathbb{V}_{n+1} - \mathbb{V}_n$		$+$	$-$

$\mathbb{V}_n$ متناقصة تماما.

$\mathbb{V}_n$ متناقصة تماما و محدودة من الأسفل ب $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ فهي متقاربة .

$\mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n = \frac{-(\mathbb{U}_n^2+\mathbb{U}_n-1)}{\mathbb{U}_n+1} \leq 0$ و $\mathbb{U}_n \geq 0$

اذن $\mathbb{U}_n$ متناقصة و محدودة من الأسفل ب 0 فهي متقاربة .

$l = f(l) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{U}_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

V. المتتاليات الحسابية:

1. تعريف : نقول عن متتالية $\mathbb{U}_n$ ذات الحد $\mathbb{U}_0$ و الأساس r أنها حسابية اذا كان :

$$\forall n \in N : \mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n + r \Leftrightarrow \mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n = r$$

مثال1:

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 0 \\ \mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n + 1 \end{cases}$$

$\Longleftarrow \mathbb{U}_n$ متتالية حسابية أساسها $r = 1$ وحدها الأول $\mathbb{U}_0 = 0$ ($\mathbb{U}_n$ تمثل متتالية الأعداد الطبيعية) .

مثال 2 :

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 0 \\ \mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n + 2 \end{cases}$$

$\Longleftarrow \mathbb{U}_n$ متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول $\mathbb{U}_0 = 0$ ($\mathbb{U}_n$ تمثل متتالية الأعداد الزوجية) .

2. تغيرات متتالية حسابية : اذا كانت $\mathbb{U}_n$ متتالية حسابية ذات الحد $\mathbb{U}_0$ و الأساس r فان :

- $\mathbb{U}_n$ متزايدة تماما(متزايدة) $\Leftrightarrow r > 0$ $(r \geq 0)$.
- $\mathbb{U}_n$ متناقصة تماما(متناقصة) $\Leftrightarrow r < 0$ $(r \leq 0)$.
- $\mathbb{U}_n$ ثابتة $\Leftrightarrow r = 0$.

3. عبارة الحد العام : اذا كانت $\mathbb{U}_n$ متتالية حسابية ذات الحد $\mathbb{U}_0$ و الأساس r فان حدها العام $\mathbb{U}_n$ يعطى كما يلي : $\mathbb{U}_n = \mathbb{U}_0 + nr$.

البرهان

$$\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_0 + \mathrm{r}$$
$$\mathbb{U}_2 = \mathbb{U}_1 + \mathrm{r}$$
$$\mathbb{U}_3 = \mathbb{U}_2 + \mathrm{r}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{U}_{n-2} + \mathrm{r}$$
$$\mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{n-1} + \mathrm{r}$$

بالجمع طرف لطرف نجد : $\mathbb{U}_n = \mathbb{U}_0 + \underbrace{(r + r + r \dots\dots + r)}_{n}$

$$\Rightarrow \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_0 + nr$$

1.3 عبارة الحد العام بدلالة الحد p : ليكن $\mathbb{U}_p$ حد من حدود المتتالية الحسابية $\mathbb{U}_n$ لذا فانه سوف يكتب كما يلي :

$$\mathbb{U}_p = \mathbb{U}_0 + p * r \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$
$$\mathbb{U}_n = \mathbb{U}_0 + n * r \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$
$$(2) - (1) \Longrightarrow \mathbb{U}_n - \mathbb{U}_p = (n-p) * r \Longrightarrow \boxed{\mathbb{U}_n = \mathbb{U}_p + (n-p) * r}$$

مثال :

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 3 \\ \mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n + 2 \end{cases}$$

- أحسب الحدود $\mathbb{U}_1$ ، $\mathbb{U}_2$ ، $\mathbb{U}_3$.
- أكتب عبارة الحد العام بدلالة الحد الأول و الحد الثالث .

الحل : $\mathbb{U}_n$ متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول $\mathbb{U}_0 = 3$

$$\begin{cases} \mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_0 + 2 = 3 + 2 = 5 \\ \mathbb{U}_2 = \mathbb{U}_1 + 2 = 5 + 2 = 7 \\ \mathbb{U}_3 = \mathbb{U}_2 + 2 = 7 + 2 = 9 \end{cases}$$

عبارة الحد العام : $\mathbb{U}_n = \mathbb{U}_0 + n * r = 3 + 2r$

عبارة الحد العام بدلالة الحد الثالث :

$$\mathbb{U}_n = \mathbb{U}_p + (n-p) * r = \mathbb{U}_3 + (n-3) * r = 3 + 2n$$

مثال : اذا كان $\mathbb{U}_n$ متتالية حسابية أحسب أساسها علما أن :

$$\begin{cases} \mathbb{U}_4 = 8 \\ \mathbb{U}_8 = 4 \end{cases}$$

$$\mathbb{U}_8 = \mathbb{U}_4 + (8-4)r \Longrightarrow r = \frac{\mathbb{U}_8 - \mathbb{U}_4}{8-4} = \frac{4-8}{8-4} = -1$$

4. **مجموع حدود متتالية حسابية** : اذا كانت $\mathbb{U}_n$ متتالية حسابية ذات الأساس r فان مجموع حدودها $\mathbb{S}$ يعطى كما يلي :

$$\forall n \in N: \mathbb{S} = \mathbb{U}_0 + \mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2 + \cdots \ldots \ldots + \mathbb{U}_n = (\frac{n+1}{2})(\mathbb{U}_0 + \mathbb{U}_n)$$

$$\mathbb{S} = (\mathrm{n}+1)(\mathbb{U}_0 + \mathrm{n} * \mathrm{r})$$

حيث $(n+1)$ يمثل عدد الحدود .

البرهان :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}: \mathbb{S} = \mathbb{U}_0 + \mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2 + \cdots \ldots \ldots + \mathbb{U}_\mathrm{n}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{S} = \mathbb{U}_0 + (\mathbb{U}_0 + \mathrm{r}) + (\mathbb{U}_0 + 2\mathrm{r}) + (\mathbb{U}_0 + 3\mathrm{r}) + \cdots \ldots \ldots + (\mathbb{U}_0 + \mathrm{nr})$$

$$\Longrightarrow \mathbb{S} = (\mathbb{U}_0 + \mathbb{U}_0 + \cdots \ldots \ldots + \mathbb{U}_0) + (\mathrm{r} + 2\mathrm{r} + 3\mathrm{r} + \cdots . . + \mathrm{nr})$$

$$\Longrightarrow \mathbb{S} = (\mathrm{n}+1)\mathbb{U}_0 + (1 + 2 + 3 + \cdots \ldots + \mathrm{n})\mathrm{r}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{S} = (\mathrm{n}+1)\mathbb{U}_0 + \mathrm{n}(\frac{\mathrm{n}+1}{2})\mathrm{r}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{S} = \frac{(\mathrm{n}+1)}{2}(2\mathbb{U}_0 + \mathrm{nr}) = \frac{\mathrm{n}+1}{2}\left[\mathbb{U}_0 + \mathbb{U}_\mathrm{n}\right]$$

مثال : أحسب مجموع 100 حد للمتتالية الحسابية ذات الأساس $r = 10$ و الحد الأول $\mathbb{U}_0 = 5$

$$\mathbb{S} = \mathbb{U}_0 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots + \mathbb{U}_{99} = \frac{99+1}{2}(\mathbb{U}_0 + \mathbb{U}_{99})$$

$$\mathbb{S} = \frac{100}{2}(5 + 5 + 99.100) = 50000$$

VI. المتتاليات الهندسية:

1. تعريف : نقول عن $\mathbb{U}_n$ أنها متتالية هندسية ذات أساس q اذا كانت من الشكل :

$$\forall n \in N: \mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n * q \Leftrightarrow \frac{\mathbb{U}_{n+1}}{\mathbb{U}_n} = q$$

نسمي q أساس المتتالية الهندسية $\mathbb{U}_n$.

مثال : لتكن $\mathbb{U}_n$ متتالية معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 1 \\ \mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n * \sqrt{2} \end{cases}$$

$\Leftarrow \mathbb{U}_n$ متتالية هندسية حدها الأول $U_0 = 1$ و أساسها $q = \sqrt{2}$.

2. *دراسة رتابة* $\mathbb{U}_n$: اذا كانت $\mathbb{U}_n$ متتالية هندسية أساسها q و حدها الأول $\mathbb{U}_0 > 0$ فانه اذا كان :

- $q > 1 \Leftarrow \mathbb{U}_n$ متزايدة تماما .
- $0 < q < 1 \Leftarrow \mathbb{U}_n$ *متناقصة تماما* .
- $q = 1 \Leftarrow \mathbb{U}_n$ ثابتة .
- اذا كان $q < 0$ يمكن ملاحظة أن $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_0 * q < 0$ لكن $\mathbb{U}_2 = \mathbb{U}_1 * q > 0$ فيمكن أن نبرهن بالتراجع أنه اذا كان p (الحد p)زوجي فان $\mathbb{U}_p > 0$ أما اذا كان p فردي فان $\mathbb{U}_p < 0$. في هذه الحالة لا يوجد معنى لتغيراتها .

أما اذا كان $\mathbb{U}_0 < 0$ فان :

- $\mathbb{U}_n \Leftarrow q > 1$ متناقصة تماما .
- $\mathbb{U}_n \Leftarrow 0 < q < 1$ *متزايدة تماما* .

3. الحد العام : اذا كانت $\mathbb{U}_n$ متتالية هندسية ذات أساس q و الحد الأول $\mathbb{U}_0$ ، فان عبارة الحد العام تعطى كما يلي :

$$\forall n \in N: \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_0 * q^n$$

البرهان :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_0 * q \\
&\mathbb{U}_2 = \mathbb{U}_1 * q \\
&\mathbb{U}_3 = \mathbb{U}_2 * q \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
&\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{U}_{n-2} * q \\
&\mathbb{U}_n = \mathbb{U}_{n-1} * q
\end{aligned}$$

بالضرب طرف لطرف نجد :

$$\mathbb{U}_1 * \mathbb{U}_2 * \mathbb{U}_3 \dots\dots * \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_0 * \mathbb{U}_1 * \mathbb{U}_2 * \mathbb{U}_3 \dots\dots * \mathbb{U}_{n-1} * (q * q \dots * q)$$
$$\Rightarrow \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_0 * q^{\sum_i^n 1} = \mathbb{U}_0 * q^n$$

1.3 كتابة الحد العام بدلالة الحد p : اذا كانت $\mathbb{U}_n$ متتالية هندسية ذات أساس q و الحد الأول $\mathbb{U}_0$ ، فان :

$$\mathbb{U}_n = \mathbb{U}_0 * q^n \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\mathbb{U}_p = \mathbb{U}_0 * q^p \dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Longrightarrow \frac{\mathbb{U}_n}{\mathbb{U}_p} = \frac{q^n}{q^p} = q^{(n-p)} \Longrightarrow \boxed{\forall \mathrm{n} \in \mathrm{N}: \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_p * q^{(n-p)}}$$

4. *مجموع* حدود متتالية هندسية : اذا كانت $\mathbb{U}_n$ متتالية هندسية ذات أساس q و الحد الأول $\mathbb{U}_0$ ، فان عبارة المجموع $\mathbb{S}$ تعطى كما يلي :

$$\forall n \in N: \mathbb{S} = \mathbb{U}_0 + \mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2 + \cdots \dots\dots + \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

البرهان :

$$\mathbb{S} = \mathbb{U}_0 + \mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2 + \cdots \dots\dots + \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_0 + \mathbb{U}_0 * q + \mathbb{U}_0 * q^2 + \cdots \dots + \mathbb{U}_0 * q^n$$

$$\Longrightarrow \mathbb{S} = \mathbb{U}_0 * (1 + q + q^2 + \cdots \ldots \ldots + q^n)$$
$$\Longrightarrow q * \mathbb{S} = \mathbb{U}_0 * (q + q^2 + q^3 + \cdots \ldots \ldots + q^{n+1})$$
$$\Longrightarrow q * \mathbb{S} = \underbrace{\mathbb{U}_0 * (1 + q + q^2 + \cdots \ldots \ldots + q^n)}_{\mathbb{S}} - \mathbb{U}_0 + \mathbb{U}_0 * q^{n+1}$$
$$\Longrightarrow \mathbb{S} = \mathbb{U}_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

خاصية : اذا كانت $\mathbb{U}_n$ متتالية هندسية ذات الأساس q و الحد الأول $\mathbb{U}_0$ فان :

$$\forall n \in N: \mathbb{S} = \mathbb{U}_0 + \mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2 + \cdots \ldots \ldots + \mathbb{U}_n = \begin{cases} (n+1) * \mathbb{U}_0 & si \;\; q = 1 \\ \mathbb{U}_0 \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1} & si \;\; q \neq 1 \end{cases}$$

مثال : $\mathbb{U}_0$ متتالية هندسية ذات الأساس $q = 10$ و الحد الأول $\mathbb{U}_0 = 5$.

أحسب مجموع 100 حد الأولى .

$$\mathbb{S} = \mathbb{U}_0 + \mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2 + \cdots \ldots \ldots + \mathbb{U}_{99} = \mathbb{U}_0 \frac{q^{99+1} - 1}{q - 1} = 5 \frac{10^{100} - 1}{10 - 1} = \frac{5}{9}(10^{100} - 1)$$

5. نهاية متتالية هندسية : اذا كانت $\mathbb{U}_n$ متتالية هندسية ذات الأساس $q \neq 1$ و الحد الأول $\mathbb{U}_0 > 0$

فانه:

- اذا كان $q > 1$ فان $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{U}_n = +\infty$
- اذا كان $-1 < q < 1$ فان $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{U}_n = 0$
- اذا كان $q < -1$ فان $\mathbb{U}_n$متباعدة

VII . المتتالية الحسابية والهندسية في آن واحد:

نقول عن المتتالية U_n أنها حسابية وهندسية إذا كانت من الشكل:

$\mathbb{U}_{n+1} = \mathrm{a}\mathbb{U}_n + \mathrm{b}$ $\qquad$ $a \neq 0$ و $a \neq 1$ ، $b \neq 0$

مثال: $\forall \mathrm{n} \epsilon \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 5 \\ \mathbb{U}_{n+1} = 3\mathbb{U}_n - 2 \end{cases}$$

$\mathbb{U}_n$ حسابية، هندسية.

لدراسة هذا النوع من المتتاليات نعتبر عادة متتالية مساعدة ولتكن هندسية.

مثال: $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 1 \\ \mathbb{U}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathbb{U}_n + 2 \end{cases}$$

تعتبر $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{V}_n = \mathbb{U}_n - 4$$

نلاحظ أن :

$$\forall_n \in \mathbb{N} : \mathbb{V}_{n+1} = \mathbb{U}_{n+1} - 4$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{U}_n + 2 - 4$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{U}_n - 2 = \frac{1}{2}(\mathbb{U}_n - 4) = \frac{1}{2}\mathbb{V}_n$$

$\Leftarrow \mathbb{V}_n$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}_n = 0 \qquad \left(q = \frac{1}{2} < 1\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{U}_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}_n + 4 = 4$$

الفصل الأول : المتتاليات العددية

تمارين المتتاليات العددية:

التمرين الأول: V_n متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} \mathbb{V}_0 = \alpha \\ 4\mathbb{V}_{n+1} = \mathbb{V}_n + 9 \quad \mathbb{V}_n \in \mathrm{N} \end{cases}$$

1. عين قيمة الثابت الحقيقي α حتى تكون (V_n) متتالية ثابتة

2. من أجل $\alpha = 4$:

نعتبر المتتالية $\mathbb{U}_n$ المعرفة كما يلي: $\mathbb{U}_n = \mathbb{V}_n - 3$

أ. أثبت أن U_n متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب.أكتب عبارتين $\mathbb{U}_n$ و $\mathbb{V}_n$ بدلالة n

ج. أحسب المجموع $+\mathbb{U}_n$ $+$ و $S_n = \mathbb{U}_0 + \mathbb{U}_1 +$ $S'_n = \mathbb{V}_0$ $+ \mathbb{V}_n$

التمرين الثاني: $\mathbb{U}_n$ متتالية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} \mathbb{U}_1 = 1 \\ \mathbb{U}_{n+1} = \dfrac{-1}{3 + \mathbb{U}_n} \end{cases}$$

1. أحسب $\mathbb{U}_2$ و $\mathbb{U}_3$ و $\mathbb{U}_4$
2. برهن أن: $\forall n \in N^* : \mathbb{U}_n > -1$
3. أدرس رتابة $(\mathbb{U}_n)$، ثم استنتج طبيعتها
4. أحسب $\lim_{n\to\infty} \mathbb{U}_n$

النمرين الثالث: لتكن $\mathbb{U}_n$ متتالية معرفة من خلال العلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 0 \\ \mathbb{U}_{n+1} = 2\mathbb{U}_n^2 + \frac{1}{8} \end{cases}$$

- أثبت أن $(\mathbb{U}_n)_{n\in N}$ متقاربة ثم أحسب نهايتها

التمرين الرابع: لتكن $\mathbb{U}_n$ متتالية معرفة من خلال العلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = \frac{3}{2} \\ \mathbb{U}_{n+1} = (\mathbb{U}_n - 1)^2 + 1 \end{cases}$$

1. بين أنه $1 < \mathbb{U}_n < 2$
2. أثبت أن $(\mathbb{U}_n)_{n\in N}$ رتيبة تماما
3. أدرس تقارب $(\mathbb{U}_n)$ ثم حدد نهايتها

التمرين الخامس: لتكن $\mathbb{U}_n$ متتالية معرفة كما يلي:

$$\mathbb{U}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathbb{U}_n + 1$$

1. أثبت أنه إذا كان $\mathbb{U}_0 < 2$ فإنه من أجل $n \geq 0$ فإن $\mathbb{U}_n \leq 2$ ، ثم تحقق من رتابتها
2. أدرس طبيعة المتتالية $(\mathbb{U}_n)$ ثم حدد نهايتها
3. نضع: $\mathbb{V}_n = \mathbb{U}_n - 2$

- أثبت أن $\mathbb{V}_n$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$
- أكتب $\mathbb{U}_n$ بدلالة n و $\mathbb{U}_0$
- أحسب $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbb{U}_k}{n}$

التمرين السادس: $(\mathbb{U}_n)$ و $(\mathbb{V}_n)$ متتاليتان معرفتان كما يلي:

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 1 \\ \mathbb{U}_{n+1} = \frac{\mathbb{U}_n + 2\mathbb{V}_n}{3} \end{cases} \quad \text{وَ} \quad \begin{cases} \mathbb{V}_0 = 12 \\ \mathbb{V}_{n+1} = \frac{\mathbb{U}_n + 3\mathbb{V}_n}{4} \end{cases}$$

نضع لكل n من N:

$$\mathbb{W}_n = \mathbb{V}_n - \mathbb{U}_n$$

1. بين أن $(\mathbb{W}_n)$ متتالية هندسية ثم عين أساسها وحدها الأول
2. أحسب $\mathbb{W}_n$ بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n\to\infty} \mathbb{W}_n$
3. بين أن $(\mathbb{U}_n)$ متتالية متزايدة و أن $(\mathbb{V}_n)$ متتالية متناقصة
4. استنتج أن $(\mathbb{U}_n)$ و $(\mathbb{V}_n)$ متقاربتان
5. نضع: $\forall n \in N \; : \quad t_n = 3\mathbb{U}_n + 8\mathbb{V}_n$
   أ. بين أن n متتالية ثابتة
   ب. استنتج نهاية كل من $\mathbb{U}_n$ و $\mathbb{V}_n$
   ج. ماذا نقول عن $\mathbb{U}_n$ و $\mathbb{V}_n$

التمرين السابع: $\mathbb{U}_n$ متتالية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 3 \\ \mathbb{U}_{n+1} = \frac{5\mathbb{U}_n}{3\mathbb{U}_n + 5} \end{cases}$$

و $\mathbb{V}_n$ معرفة بـــ:

$$\mathbb{V}_n = \frac{5}{\mathbb{U}_n}$$

1. أحسب $_0$ ثم برهن أن $(\mathbb{V}_n)_{n\in N}$ متتالية حسابية محددا أساساها و حدها الأول، ثم أكتب عبارة الحد العام لـ $\mathbb{V}_n$ ثم أكتب $\mathbb{U}_n$ بدلالة n

2. أحسب $S_n = \mathbb{V}_0 +$ $+\mathbb{V}_n$

حلول تمارين المتتاليات العددية:

التمرين الأول:

$$\begin{cases} \mathbb{V}_0 = \alpha \\ 4\mathbb{V}_{n+1} = \mathbb{V}_n + 9 \end{cases} \quad \mathbb{V}_n \in N$$

1. $\mathbb{V}_n$ متتالية ثابتة $\iff \mathbb{V}_{n+1} = \mathbb{V}_n = \cdots\cdots \mathbb{V}_0 = \alpha$

$$\Rightarrow 4\alpha = \alpha + 9$$

$$\Rightarrow 3\alpha = 9 \Rightarrow \alpha = \frac{9}{3} = 3$$

2. $$\mathbb{U}_n = \mathbb{V}_n - 3$$

أ. $\mathbb{U}_n$ متتالية هندسية $\iff \mathrm{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n \cdot q$

$$\mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{V}_{n+1} - 3$$

$$= \frac{\mathbb{V}_n+9}{4} = 3 = \frac{1}{4}\mathbb{V}_n - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(\mathbb{V}_n - 3)$$

$\mathbb{U}_n$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول $\mathrm{U}_0 = \mathbb{V}_0 - 3 = 4 - 3 = 1$

ب. $$\mathbb{U}_n = \mathbb{U}_0 \cdot q^n = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\mathbb{V}_n = \mathbb{U}_n + 3 = \left(\frac{1}{4}\right)^n + 3$$

ج. $$\mathrm{S_n} = \mathbb{U}_0 \cdot \frac{\mathrm{q^n}-1}{\mathrm{q}-1} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{n}}-1}{\frac{1}{4}-1} = \frac{-4\left(\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{n}}+4}{3}$$

$$S' = (\mathbb{U}_0 + 3) + (\mathbb{U}_1 + 3) \cdots\cdots\cdots + (\mathbb{U}_n + 3)$$

$$\mathrm{S'} = \mathrm{S_n} + 3(\mathrm{n}+1) = \frac{4\left(\frac{1}{4}\right)^{\mathrm{n}} + 4}{3} + 3(\mathrm{n}+1)$$

التمرين الثاني:

$$\begin{cases} \mathbb{U}_1 = 1 \\ \mathbb{U}_{n+1} = \dfrac{-1}{3+\mathbb{U}_n} \end{cases} \qquad \forall n \in N$$

1. $\mathbb{U}_2 = \frac{-1}{3+1} = \frac{-1}{4}$; $\mathbb{U}_3 = \frac{-1}{3-\frac{1}{4}} = \frac{-4}{11}$; $\mathbb{U}_4 = \frac{-1}{3-\frac{4}{11}} = \frac{-11}{29}$

2. لنبرهن بالتراجع أن : $\forall n \in N^* : P(n): \mathbb{U}_n > -1$

صحيحة $P(n): \mathbb{U}_1 = 1 > -1$

نفرض أن: ($P(n): \mathbb{U}_n > -1$ صحيحة) $\Rightarrow$ ($P(n+1): \mathbb{U}_{n+1} > -1$ صحيحة؟)

$$\mathbb{U}_n > -1 \Rightarrow 3 + \mathbb{U}_n > 3 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3+\mathbb{U}_n} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{3+\mathbb{U}_n} < -\frac{1}{2} > -1$$

$\Rightarrow: \mathbb{U}_{n+1} > -1 \Rightarrow P(n+1)$ صحيحة

أي: $\mathbb{U}_n > -1$

3. $\mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n = \frac{-1}{3+\mathbb{U}_n} - \mathbb{U}_n = \frac{-1-3\mathbb{U}_n-{\mathbb{U}_n}^2}{3+\mathbb{U}_n}$

$-\mathbb{U}_n^2 - 3\mathbb{U}_n - 1$ *ندرس إشارة* $\mathbb{U}_n > -1$ *لأن* $3 + \mathbb{U}_n > 0$

$$\begin{cases} \mathbb{U}'_n = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} & \text{مرفوض} \\ \mathbb{U}''_n = \frac{\sqrt{3}-3}{2} = 0{,}38 \end{cases}$$

	$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{5}-3}{2} = 0{,}38$
	$-$	$+$	$-$

لنبرهن بالتراجع أنه: $\forall n \in N^*$ $\mathbb{U}_n \geq \frac{\sqrt{5}-3}{2}$

$$P(1): \mathbb{U}_1 = 1 \geq \frac{\sqrt{5}-3}{2} \quad \text{محققة}$$

لنبرهن أن: محققة $P(n): \ \mathbb{U}_n \geq \frac{\sqrt{5}-3}{2}$ صحيحة $\Rightarrow P(n+1): \ \mathbb{U}_{n+1} \geq \frac{\sqrt{3}-3}{2}$

$$\mathbb{U}_n \geq \frac{\sqrt{5}-3}{2} \Rightarrow 3 + \mathbb{U}_n \geq 2{,}62 \Rightarrow \frac{1}{3+\mathbb{U}_n} \leq +0{,}38$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{3+\mathbb{U}_n} \geq -0{,}38$$

إذن: $\mathbb{U}_n \geq \frac{\sqrt{5}-3}{2}$ صحيحة $\mathbb{U}_n \Leftarrow$ متناقصة

$\mathbb{U}_n \geq \frac{\sqrt{5}-3}{2}$ متناقصة $U_n \Leftarrow$ متقاربة

4. U_n متقاربة $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{U}_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{U}_n = l$

$$\Rightarrow l = \frac{-1}{3+l} \Rightarrow l^2 + 3l + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ l = \frac{\sqrt{5}-3}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{U}_n = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$$

التمرين الثالث:

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 0 \\ \mathbb{U}_{n+1} = 2\mathbb{U}_n^2 + \frac{1}{8} \end{cases}$$

لندرس رتابة $\mathbb{U}_n$:

$$\mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n = 2\mathbb{U}_n^2 - \mathbb{U}_n + \frac{1}{8}$$

$$\Delta:\ 1 - 4(2)\left(\frac{1}{8}\right) < 0 \Rightarrow \mathbb{U}_{n_1} = \frac{+1}{4}$$

$$\Rightarrow \mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n = 2(\mathbb{U}_n - \frac{1}{4})^2 \geq 0$$

$\Leftarrow \mathbb{U}_n$ متزايدة

لنبرهن بالتراجع أنه: $\forall \in N:\ \mathbb{U}_n \leq \frac{1}{4}$

محققة $\mathrm{P}(0): \mathbb{U}_0 = 0 \leq \frac{1}{4}$

لنبرهن أن : (محققة) $\frac{1}{4} \leq \mathbb{U}_{n+1}$ محققة $\Rightarrow P(n): \mathbb{U}_n \leq \frac{1}{4}$

$$\mathbb{U}_n \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \mathbb{U}_n^2 \leq \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow 2\mathbb{U}_n^2 \leq \frac{1}{8} \Rightarrow 2\mathbb{U}_n^2 + \frac{1}{8} \leq \frac{2}{8} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \mathbb{U}_{n+1} \leq \frac{1}{4}$$

$\mathbb{U}_n$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $\frac{1}{4}$ فهي متقاربة

$\mathbb{U}_n$ متقاربة $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{U}_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{U}_{n+1} = \mathrm{l}$

$$2l^2 - l + \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow l = \frac{1}{4}$$

التمرين الرابع :

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 3/2 \\ \mathbb{U}_{n+1} = (\mathbb{U}_n - 1)^2 + 1 \end{cases}$$

1)لنبين بالتراجع أنه :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad 1 < \mathbb{U}_n < 2$$

نضع :

$$p(n): 1 < \mathbb{U}_n < 2$$

من أجل : $n = 0$:

$$p(0): 1 < \frac{3}{2} < 2 \quad \text{محققة}$$

نفرض أن :

$$p(n): \ 1 < \mathbb{U}_n < 2 \ \text{محققة} \Longrightarrow p(n+1): \ 1 < \mathbb{U}_{n+1} < 2 \ \text{محققة}$$

$$1 < \mathbb{U}_n < 2 \Rightarrow 0 < \mathbb{U}_n - 1 < 1 \Rightarrow 0 < (\mathbb{U}_n - 1)^2 < 1$$
$$\Rightarrow 1 < (\mathbb{U}_n - 1)^2 + 1 < 2$$
$$\Rightarrow 1 < \mathbb{U}_{n+1} < 2$$

اذن :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad 1 < \mathbb{U}_n < 2$$

$$\mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n = (\mathbb{U}_n - 1)^2 + 1 - \mathbb{U}_n = (\mathbb{U}_n - 1)^2 - (\mathbb{U}_n - 1)$$
$$= (\mathbb{U}_n - 1)(\mathbb{U}_n - 2)$$
$$\Rightarrow 1 < \mathbb{U}_n < 2 \Rightarrow \mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n < 0$$

اذن $\mathbb{U}_n$ رتيبة .

$\mathbb{U}_n$ متناقصة تماما و محدودة من الأسفل ب 1 فهي متقاربة .

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{U}_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{U}_{n+1} = l \Leftrightarrow \text{متقاربة } \mathbb{U}_n$$

$$\Longrightarrow l = (l-1)^2 + 1$$

$$\Longrightarrow (l-1)^2 - l + 1 = 0 \Longrightarrow (l-1)(l-2) = 0 \Longrightarrow l = 1 \text{ أو } l = 2 \text{ مرفوض}$$

(لأن $U_0 = \frac{3}{2}$ و $\mathbb{U}_n$ *متناقصة*)

$$\Longrightarrow l = 1$$

التمرين الخامس :

$$\mathbb{U}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathbb{U}_n + 1$$

1) لنبين بالتراجع أنه اذا كان $U_0 < 2$ فان : $\forall n \in N : U_n < 2$

من أجل $n = 0$: $P(0) : U_0 < 2$

اذن $P(0)$ محققة .

نفرض أن : $P(n) : U_n < 2$ محققة . ونبرهن صحة القضية : : $P(n+1) : U_{n+1} < 2$

$$U_n < 2 \Longrightarrow \frac{1}{2}U_n < 1 \Longrightarrow \frac{1}{2}U_n + 1 < 2 \Longrightarrow U_{n+1} < 2$$

$$\Rightarrow \forall n \in N : U_n < 2.$$

- $\mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n = \frac{1}{2}U_n + 1 - U_n = 1 - \frac{1}{2}U_n = \frac{2-U_n}{2} > 0. (U_n < 2)$

اذن U_n متزايدة .

2) U_n متزايدة و محدودة من الأسفل ب 2 $(U_n < 2)$ فهي متقاربة .

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{U}_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{U}_{n+1} = l \Leftrightarrow \text{متقاربة } U_n$$

$$\Longrightarrow l = \frac{1}{2}l + 1 \Longrightarrow l = 2$$

3) $V_n = U_n - 2$

V_nهندسية $\Leftrightarrow V_{n+1} = V_n . q$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}U_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}U_n - 1 = \frac{1}{2}(\underbrace{U_n - 2}_{V_n})$$

اذن V_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.

عبارة الحد العام :

$$V_n = V_0 * q^n = V_0 * \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Longrightarrow U_n = V_n + 2 = V_0 * \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 = (U_0 - 2) * \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

- $\lim \sum_{k=0}^{n} \frac{U_K}{n} = \lim \sum_{k=0}^{n} \frac{V_k + 2}{n} = \lim \sum_{k=0}^{n} \frac{V_k}{n} + \frac{2(n+1)}{n}$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[V_0 . \frac{q^n - 1}{q-1}\right]}_{0} + \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2$$

التمرين السادس:

$$\begin{cases} \mathbb{U}_0 = 1 \\ \mathbb{U}_{n+1} = \frac{\mathbb{U}_n + 2\mathbb{V}_n}{3} \end{cases} \quad ; \quad \text{وَ} \quad \begin{cases} \mathbb{V}_0 = 12 \\ \mathbb{V}_{n+1} = \frac{\mathbb{U}_n + 3\mathbb{V}_n}{4} \end{cases}$$

$$\mathbb{W}_n = \mathbb{V}_n - \mathbb{U}_n$$

1) W_nهندسية $\Leftrightarrow W_{n+1} = W_n . q$

$$W_{n+1} = \mathbb{V}_{n+1} - \mathbb{U}_{n+1} = \frac{\mathbb{U}_n + 3\mathbb{V}_n}{4} - \frac{\mathbb{U}_n + 2\mathbb{V}_n}{3} = \frac{3(\mathbb{U}_n + 3\mathbb{V}_n) - 4(\mathbb{U}_n + 2\mathbb{V}_n)}{12} = \frac{\mathbb{V}_n - \mathbb{U}_n}{12}$$

$$\Longrightarrow W_{n+1} = \frac{1}{12}\mathbb{W}_n$$

اذن W_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$ وحدها الأول :

$$\mathbb{W}_0 = \mathbb{V}_0 - \mathbb{U}_0 = 12 - 1 = 11$$

2) عبارة الحد العام :

$$W_n = W_0 . q^n = 11.\left(\frac{1}{12}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} W_n = 0 \ \ (0 < q = \frac{1}{12} < 1)$$

3) رتابة U_n و $\mathbb{V}_n$

$$\mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n = \frac{\mathbb{U}_n + 2\mathbb{V}_n}{3} - \mathbb{U}_n = \frac{\mathbb{U}_n + 2\mathbb{V}_n - 3\mathbb{U}_n}{3} = \frac{2}{3}(\mathbb{V}_n - \mathbb{U}_n) = \frac{2}{3}W_n$$

$$\mathbb{U}_{n+1} - \mathbb{U}_n = \frac{2}{3} * 11.\left(\frac{1}{12}\right)^n > 0 \ \forall n \in N$$

$\Longleftarrow \mathbb{U}_n$ متزايدة تماما .

$$V_{n+1} - V_n = \frac{\mathbb{U}_n + 3\mathbb{V}_n}{4} - V_n = \frac{\mathbb{U}_n + 3\mathbb{V}_n - 4\mathbb{V}_n}{4} = -\frac{1}{4}(\mathbb{V}_n - \mathbb{U}_n) = -\frac{1}{4}W_n < 0$$

$\Longleftarrow U_n$متناقصة تماما .

- $\forall n \in N: \mathbb{W}_n = \mathbb{V}_n - \mathbb{U}_n > 0 \Rightarrow \mathbb{V}_n > \mathbb{U}_n \Rightarrow U_n < V_n$

اذن :

$$U_0 < U_1 < \cdots \ldots \ldots < U_n < V_n < V_{n-1} < \cdots \ldots \ldots \ldots < V_0$$

لأن U_n متزايدة و V_n متناقصة .

$\Longleftarrow U_n$ متزايدة و محدودة من الأعلى ب V_0 فهي متقاربة . و V_n و محدودة من الأسفل ب U_0 فهي متقاربة .

5) $\forall n \in N : \ t_n = 3U_n + 8V_n$

- t_n ثابتة $\Longleftrightarrow \forall n \in N : \ t_{n+1} = t_n = t_0 = 3U_0 + 8V_0$

$$\Rightarrow t_n = 99$$

- $\forall n \in N : \ t_n = 3U_n + 8V_n = 99$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} t_n = 3\lim U_n + 8\lim_{n\to\infty} V_n = 99 \ ; \ \lim W_n = \lim_{n\to\infty} V_n - \lim U_n = 0$$

بوضع $\lim U_n = l$ و $\lim V_n = l'$ نجد :

$$\begin{cases} 3l + 8l' = 99 \\ l - l' = 0 \end{cases} \Longrightarrow l = l' = 9 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} V_n = 9$$

-

U_n متزايدة و V_n متناقصة.

$\lim_{n\to\infty}(U_n - V_n) = 0$ و $U_n < V_n$.

التمرين السابع :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n}{3U_n + 5} \end{cases}$$

$$V_n = \frac{5}{U_n}$$

$$V_0 = \frac{5}{U_0} = \frac{5}{3}$$

V_n متتالية حسابية $\Leftrightarrow \forall n \in N : V_{n+1} = V_n + r$

$$V_{n+1} = \frac{5}{U_{n+1}} = \frac{5.(3U_n + 5)}{5U_n} = 3 + \frac{5}{U_n} = V_n + 3$$

V_n متتالية حسابية أساسها $r = 3$ و حدها الأول $V_0 = \frac{5}{3}$ $\Leftarrow$

$$V_n = V_0 + nr = \frac{5}{3} + 3n = \frac{5 + 9n}{3}$$

$$U_n = \frac{5}{V_n} = \frac{15}{5 + 9n}$$

2) $s = \frac{n+1}{2}(V_0 + V_n) = \frac{n+1}{2}\left(\frac{10+9n}{3}\right)$.

الفصل الثاني : السلاسل العددية

I. تعريف1 : لتكن $(\mathbb{U}_k)_{k>0}$ متتالية في مجموعة الأعداد الحقيقية نسمي:

$$\mathbb{S}_n = \mathbb{U}_0 + \mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2 + \cdots \ldots \ldots + \mathbb{U}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{U}_k$$

سلسلة عددية ذات الحد العام $(\mathbb{U}_k)$. نرمز عادة للسلسلة العددية ب $\forall k \in N: \sum_{k>0} \mathbb{U}_k$

نسمي $(\mathbb{S}_n)$ أيضا متتالية المجاميع الجزئية .

مثال : اذا كانت $\mathbb{U}_k = q^k$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول 1. نسمي $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{q}^{\mathrm{k}}$ سلسلة هندسية ، أما متتالية المجاميع الجزئية فهي :

$$\begin{cases} \mathbb{S}_0 = 1 \\ \mathbb{S}_1 = 1 + q \\ \mathbb{S}_2 = 1 + q + q^2 \\ \\ \mathbb{S}_n = 1 + q + q^2 + \cdots . + q^n \end{cases}$$

تعريف 2 : اذا قبلت السلسلة $\mathbb{S}_n$ نهاية محدودة في □ او □ أي :

$$\mathbb{S} = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{U}_k = \lim_{n\to\infty} \mathbb{S}_n = l$$

نقول حينئذ أن السلسلة ذات الحد العام $\mathbf{U}_n$ أنها متقاربة ، و في الحالة العكسية نقول أنها متباعدة .

نظرية : اذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{U}_n$ متقاربة فان المتتالية $\mathbb{U}_n$ تتقارب نحو 0 .

البرهان : $\mathbb{S}_n$ متقاربة $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{S}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{U}_n = l$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{S}_{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{U}_{n-1} = l \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{U}_n - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{U}_{n-1} = l - l = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (\mathbb{U}_0 + \mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2 + \cdots + \mathbb{U}_n) - \lim_{n\to\infty} (\mathbb{U}_0 + \mathbb{U}_1 + \mathbb{U}_2 + \cdots + \mathbb{U}_{n-1}) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (\mathbb{U}_n) = 0$$

II. سلاسل شهيرة:

1. **السلسلة الهندسية** : نقول عن سلسلة أنها هندسية اذا كان حدها العام من الشكل $\mathbb{U}_n = \mathbb{U}_0 * q^n$.

مثال : $S = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n ; S = \sum q^n \ ; S = \sum 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

❖ نقول أن السلسلة $\sum \mathbb{U}_0 * q^n$ أنها متقاربة اذا كان $|q| < 1$ حينئذ نكتب :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{U}_0 * \mathrm{q}^k = \mathbb{U}_0(1 + q + q^2 + \cdots . + q^n) = \mathbb{U}_0 * \frac{1}{1-q}$$

مثال : اذا كان $S = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

اذا كان : $S = \sum(\frac{1}{3})\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n = (\frac{1}{3})\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

2. **سلسلة *Leibniz*** : $(\mathbb{U}_k)_{k>0}$ متتالية بحيث $\forall k \in N: \mathbb{U}_k > 0$ فان السلسلة $\sum_{k>0}(-1)^k \mathbb{U}_k$ تدعى سلسلة بديلة Aternée اذا تحققت فيها الشروط التالية :

$$\begin{cases} \bullet \ \forall\, k \in N: \mathbb{U}_k > 0 \\ \bullet \ \mathbb{U}_k \searrow \text{(متتالية متناقصة)} \\ \bullet \ \lim\limits_{n\to\infty}(\mathbb{U}_k) = 0 \end{cases}$$

نستطيع القول حينئذ أن : $\sum_{k>0}(-1)^k \mathbb{U}_k$ متقاربة .

مثال :

$$S = \sum(-1)^{\mathrm{k}}(\frac{1}{1+\mathrm{k}})$$

نضع : $\mathbb{U}_k = \frac{1}{1+k}$

$$\begin{cases} \bullet\ \forall\, k \in N: \mathbb{U}_k > 0 \\ \bullet\ \mathbb{U}_k \searrow \text{(متتالية متناقصة)} \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+k}\right) = 0 \end{cases}$$

حسب خاصية ***Leibniz*** فان السلسلة : $S = \sum(-1)^k(\frac{1}{1+k})$ متقاربة.

3. **سلسلة ريمان:**

تعريف : لتكن $\alpha \in R$ نقول عن السلسلة $S_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ أنها متقاربة اذا كان $\alpha > 1$.

مثال :

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$\mathbb{U}_n = \frac{1}{n^2}\,;\ \alpha = 2 > 1$$

حسب ريمان فان : $S_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2$ سلسلة متقاربة .

نظرية : لتكن $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{U}_{\boldsymbol{n}}$ سلسلة حقيقية ، اذا كانت $n^{\alpha} * \mathbb{U}_n$ تتقارب نحو 0 مع $\alpha > 1$ فان السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{U}_{\boldsymbol{n}}$ متقاربة .

4. **خاصية D'alembert :**

تعريف : لتكن $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{U}_{\boldsymbol{n}}$ سلسلة حقيقية حيث $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|\frac{\mathbb{U}_{n+1}}{\mathbb{U}_n}\right|\right) = l$ فاذا كان :

- $l < 1 \Longleftarrow \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{U}_{\boldsymbol{n}}$ متقاربة .
- $l > 1 \Longleftarrow \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{U}_{\boldsymbol{n}}$ متباعدة .
- $l = 1 \Longleftarrow$ لا يمكن الحكم على طبيعتها.

مثال : $S_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

نضع : $\mathbb{U}_n = \frac{x^n}{n!}$

$$\Rightarrow \left|\frac{\mathbb{U}_{n+1}}{\mathbb{U}_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} * \frac{n!}{x^n}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| = \frac{|x|}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\left|\frac{\mathbb{U}_{n+1}}{\mathbb{U}_n}\right|\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$$

$l = 0 < 1$ حسب **alembert** فان $S_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ متقاربة .

5. **قاعدة كوشي** :لتكن $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{U}_{\boldsymbol{n}}$ سلسلة حقيقية حيث :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\mathbb{U}_n|} = \lim_{n\to+\infty}|\mathbb{U}_n|^{1/n} = l$$

اذا كان :

- $l < 1 \Longleftarrow \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{U}_{\boldsymbol{n}}$ متقاربة .
- $l > 1 \Longleftarrow \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{U}_{\boldsymbol{n}}$ متباعدة .
- $l = 1 \Longleftarrow$ لا يمكن الحكم على طبيعة السلسلة.

مثال : $S_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+4}\right)^n$

نضع :

$$\mathbb{U}_{\boldsymbol{n}} = \left(\frac{3k+1}{5k+4}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{|\mathbb{U}_n|} = \left(\frac{3n+1}{5n+4}\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\mathbb{U}_n|} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+4}\right) = \frac{3}{5} < 1$$

$\Longleftarrow S_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+4}\right)^n$ متقاربة .

6. **سلاسل ريمان Riemen** :

تعريف : لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n*\alpha}}$ سلسلة حقيقية حيث $\alpha > 0$ ، اذا كان :

- $\alpha > 1 \Longleftarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n*\alpha}}$ سلسلة متقاربة .
- $0 < \alpha < 1 \Longleftarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n*\alpha}}$ سلسلة متباعدة .

مثال : $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

حسب ريمان $0 < \alpha = \frac{1}{2} < 1$ فالسلسلة S_n متباعدة .

7. **سلاسل Bertrand** : نقول عن سلسلة حقيقية انها من عائلة **Bertrand** اذا كانت من الشكل :

$$S_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}(lnk)^{\beta}}$$

اذا كان :

- $\alpha < 1 \Longleftarrow$ السلسلة متقاربة .
- $0 < \alpha < 1 \Longleftarrow$ السلسلة متباعدة .
- اذا كان $\alpha = 1$ و $\beta > 1$ فان السلسلة متقاربة .
- اذا كان $\alpha = 1$ و $\beta \leq 1$ فان السلسلة متباعدة.

نظرية : اذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{U}_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{V}_n$ سلسلتين حقيقتين و حدودها العامة $\mathbb{U}_n$ **و** $\mathbb{V}_n$ موجبة تماما بحيث $\mathbb{U}_n \leq \mathbb{V}_n$ فان :

- ❖ $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{V}_n$ متقاربة $\Longleftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{U}_n$ متقاربة .
- ❖ $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{V}_n$ متباعدة $\Longleftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{U}_n$ متباعدة .

مثال : أدرس تقارب السلسلة التالية : $S_n = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ لدينا السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ متقاربة حسب ريمان لأن $\alpha = 2 > 1$ كما أن $\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ مع العلم أن $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ متقاربة $\Longleftarrow$ $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ متقاربة .

الفصل الثاني : السلاسل العددية

تمارين حول السلاسل العددية :

تمرين : عين طبيعة السلاسل العددية ثم أحسب مجموع السلسلة المتقاربة منها إذا أمكن.

1) $\mathbb{S}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n$

2) $\mathbb{S}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{1+e^{-n}}$

3) $\mathbb{S}_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$

4) $\mathbb{S}_n = \sum_{n=0}^{\infty} e^n$

5) $\mathbb{S}_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n})$

6) $\mathbb{S}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, cos^2 n}$

7) $\mathbb{S}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n\,!}{n^n}$

8) $\mathbb{S}_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(lnn)^n}$

الحل:

1) $\mathbb{S}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n$

مجموع سلسلة هندسية حدها الأول $\left(\frac{e}{3}\right)^0 = 1$ و أساسها $\mathbb{q} = \frac{e}{3} < 1$ إذن $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n$ متقاربة.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n = 1 \times \frac{1}{1-\frac{e}{3}} = \frac{3}{3-e}$$

2) $\mathbb{U}_n = \frac{6}{1+e^{-n}} \Leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{1+e^{-n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{U}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{1+e^{-n}} = 6 \neq 0$$

$\Leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{1+e^{-n}}$ متباعدة.

3) $\mathbb{U}_n = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}} \Leftarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$

$$\forall n \geq 2 \qquad \ln(n+1) > 1$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

لكن $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة (سلسلة ريمان $\alpha = \frac{1}{2} < 1$)

$\Leftarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$ متباعدة.

4) $\sum_{n=0}^{\infty} e^n$

مجموع سلسلة هندسية حدها الأول $U_0 = 1$ وأساسها $q = e > 1$

إذن $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ متباعدة.

5) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n})$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

$\mathbb{S}_n$عبارة عن مجموع سلسلتين $n = \mathbb{S}'_n + \mathbb{S}''_n$

$\mathbb{S}'_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ مجموع سلسلة هندسية حدها الأول 1 و أساسها $q = \frac{1}{2} < 1$ فهي

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \Leftarrow$ متقاربة

$\mathbb{S}''_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ مجموع سلسلة هندسية حدها الأول 1 أساسها $q = \frac{1}{3} < 1$ فهي

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \Leftarrow$ متقاربة

$\Leftarrow \mathbb{S}_n = \sum \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}$ متقاربة.

حيث: $\mathbb{S}_n = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$

6) $\mathbb{S}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, cos^2 n}$

نضع $U_n = \frac{1}{n\, cos^2 n}$ لكن $cos^2 n < 1$ $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow n\, cos^2 n < n$

$\Rightarrow \frac{1}{n\, cos^2 n} > \frac{1}{n} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{n\, cos^2 n} > 1$

لدينا السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ متباعدة

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, cos^2 n}$ متباعدة

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \Leftarrow \mathbb{U}_n = \frac{3^n n!}{n^n}$

بتطبيق قاعدة *D'Alembert*

$$\left|\frac{\mathbb{U}_{n+1}}{\mathbb{U}_n}\right| = \left|\frac{3^{n+1} \times (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{3^n \times n!}\right|$$

$$= \left|\frac{3^n \times 3 \times (n+1) n! \times n^n}{(n+1)^n \times (n+1) \times 3^n \times n!}\right| = \frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= 3\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = 3\left[(1+\frac{1}{n})^n\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mathbb{U}_{n+1}}{\mathbb{U}_n}\right] = \lim_{n\to\infty} 3\left[(1+\frac{1}{n})^n\right]^{-1} = 3e^{-1} = \frac{3}{e} > 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n \times n!}{n^n} \text{ متباعدة}$$

8) $\mathbb{S}_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(lnn)^n} \Leftarrow \mathbb{U}_n = \frac{1}{(lnn)^n}$

بتطبيق اختبار كوشي نجد :

$$|\mathbb{U}_n|^{\frac{1}{n}} = \left|\frac{1}{(lnn)^n}\right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(\ln(n))^{\frac{n}{n}}} = \frac{1}{(lnn)}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} |\mathbb{U}_n|^{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{(lnn)} = \frac{1}{+\infty} = 0 < 1$$

$\Longleftarrow$ $\mathbb{S}_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(lnn)^n}$ متقاربة

I. الدوال:

1. تعريف دالة : الدالة هي كل تطبيق f معرف من I نحو R $(f: I \longrightarrow R)$ حيث I جزء (مجال) من R .

نسمي I مجال تعريف الدالة f .

مثال :

$$f:]0, +\infty[\to R$$

$$x \quad \to \sqrt{x}$$

$$f:]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to R$$

$$x \to \frac{1}{x}$$

2. **عمليات على الدوال** : لتكن f و g دالتين معرفتين من I نحو R كمايلي :

$f: I \longrightarrow R$ $\qquad$ $g: I \longrightarrow R$

$x \quad \to f(x)$ $\qquad$ $x \quad \to g(x)$

جمع الدالتين f و g يعطى كما يلي :

$$f + g: I \longrightarrow R$$

$$x \quad \to (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

أما جداء الدالتين :

$$f * g: I \longrightarrow R$$

$$x \quad \to (f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

ضرب عدد حقيقي في دالة :

$\delta f: I \longrightarrow R$

$x \quad \rightarrow (\delta f)(x) = \delta f(x)$

8. **الدوال المحدودة** :

تعريف : لتكن f دالة معرفة من I نحو R كمايلي :

$f: I \longrightarrow R$

$x \quad \rightarrow f(x)$

نقول حينئذ **أن** :

✓ f **دالة ثابتة** $\Leftrightarrow \forall x \in I, \exists \alpha \in R : f(x) = \alpha$

✓ f محدودة من الأعلى $\Leftrightarrow \forall x \in I, \exists M \in R : f(x) \leq M$

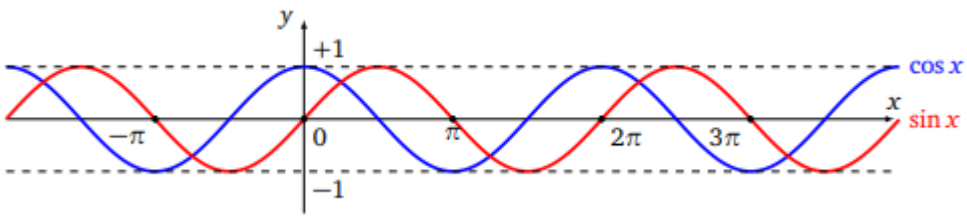
✓ f محدودة من الأسفل $\Leftrightarrow \forall x \in I, \exists m \in R : f(x) \geq m$

✓ f محدودة $\Leftrightarrow \forall x \in I, \exists M \in R : |f(x)| \leq M$

مثال : الدوال $f(x) = \sin(x)$ و $f(x) = \cos(x)$ هي دوال محدودة من الأعلى ب 1 و من الأسفل ب -1 .

$-1 < \sin(x) < 1$ و $-1 < \cos(x) < 1$

الشكل رقم (1.3) : المنحنى البياني للدوال المثلثية



9. **الدوال المتزايدة و المتناقصة (الرتابة)** :

تعريف : لتكن f دالة معرفة من I نحو R كمايلي :

$f: I \longrightarrow R$

$x \quad \rightarrow f(x)$

نقول حينئذ **أن** :

✓ f متزايدة $\Leftrightarrow \forall x, y \in I, x \leq y \Longrightarrow: f(x) \leq f(y)$

✓ f متزايدة تماما $\Leftrightarrow \forall x, y \in I, x \leq y \Longrightarrow: f(x) < f(y)$

✓ f متناقصة $\Leftrightarrow \forall x, y \in I, x \geq y \Longrightarrow: f(x) \geq f(y)$

✓ f متناقصة تماما $\Leftrightarrow \forall x, y \in I, x > y \Longrightarrow: f(x) > f(y)$

نقول أن f رتيبة (رتيبة تماما) اذا كانت اما متزايدة او متناقصة على مجال تعريفها (متزايدة تماما أو متناقصة تماما).

II. النهايات:

1. النهاية عند نقطة:

تعريف : لتكن f دالة معرفة من I نحو R $(f: I \longrightarrow R)$ ، $x_0 \in I$ نقطة من I ، *نقول* أن الدالة f تقبل نهاية $l \in R$ عند x_0 اذا وفقط اذا كان :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Longrightarrow f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$$

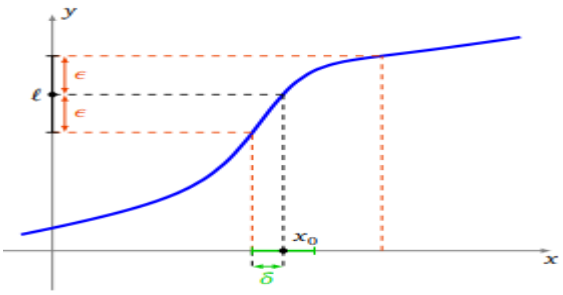
أو

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

ونكتب : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

أما هندسيا فيعبر على القانون أعلاه كما يلي :

الشكل رقم (2.3): نهاية الدالة عند x_0



مثال:

$$f: R_+^* \longrightarrow R$$
$$x \quad \to f(x) = \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$$

2. **نهاية دالة معرفة على مجال من الشكل** $I =]a, x_0[\sqcup]x_0, b[$:

نقول أن f تؤول الى $+\infty$ عند x_0 اذا كان :

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) \geq M$$

ونكتب : $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

نقول أن f تؤول الى $-\infty$ عند x_0 اذا كان :

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < -M$$

ونكتب : $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

3. **نهاية دالة عند** ∞ :

تعريف : لتكن $f:]-\infty, +\infty[\longrightarrow R$ ، نقول f تقبل نهاية l عند $+\infty$ اذا كان :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in I : x > M \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

ونكتب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

ونقول f تقبل نهاية l عند $-\infty$ اذا كان :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in I : x < -M \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

ونكتب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

مثال 1 : $f(x) = x^n$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty\ (\text{زوجي} n) \\ -\infty (\text{فردي} n) \end{cases}$$

مثال 2 : $f(x) = \frac{1}{x^n}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

4. النهاية من اليمين و اليسار :

- عندما تقبل f نهاية l على يمين x_0 نكتب :

$$\lim_{\substack{>\\ x\to x_0}} f(x) = l$$

- عندما تقبل f نهاية l على يسار X_0 نكتب :

$$\lim_{\substack{<\\ x\to x_0}} f(x) = l$$

مثال :

- $f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow Df =]0, +\infty[\Longrightarrow \lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} \sqrt{x} = 0$
- $f(x) = |x| \Longrightarrow Df =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

  $\Longrightarrow \lim\limits_{\substack{<\\ x\to 0}} |x| = \lim\limits_{\substack{<\\ x\to 0}} (-x) = 0$

ملاحظة : اذا كانت f تقبل نهاية l فان هذه النهاية وحيدة .

5. **عمليات على النهايات** : اذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$ فان :

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) = l + l'$
- $\lim_{x\to x_0}(f*g)(x) = l * l'$
- $\lim_{x\to x_0}(\lambda f)(x) = \lambda l$
- $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'} \; / l' \neq 0$
- $f(x) \leq g(x) \Longrightarrow l \leq l'$
- $\lim_{x\to x_0}(g \circ f)(x) = l'$

III. الاستمرارية عند نقطة:

I. تعريف : لتكن f دالة معرفة من I نحو R $(f: I \longrightarrow R)$ نقول أن f مستمرة عند $x_0 \in I$ اذا كان :

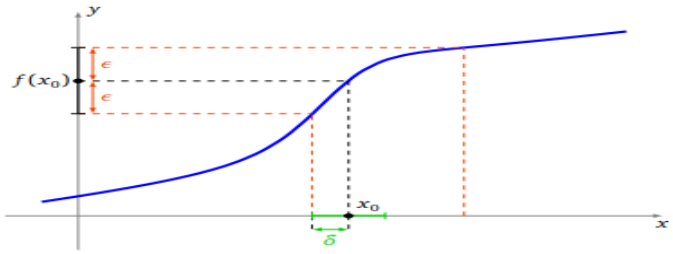
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ونكتب :

$$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = l$$

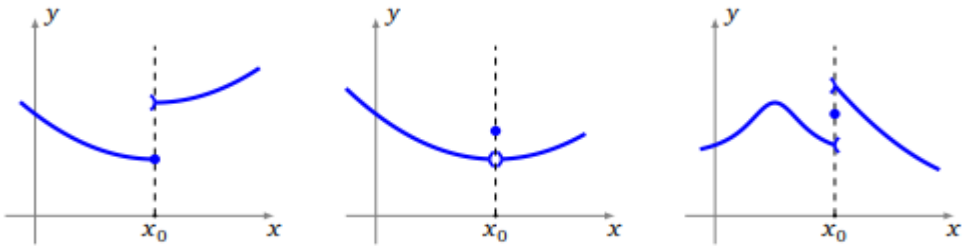
ويعبر عن الاستمرارية هندسيا كما في المنحنى أدناه :

الشكل رقم (3.3): شكل الدالة المستمرة عند x_0



وهذه منحنيات بعض الدوال غير المستمرة عند x_0 :

الشكل رقم (4.3): *شكل بعض الدوال غير المستمرة عند* x_0



❖ نقول أن f مستمرة على مجال تعريفها I اذا كانت مستمرة عند كل نقطة من I .

❖ نقول أن f مستمرة عند x_0 اذا كانت مستمرة من اليمين و من اليسار عند x_0 أي اذا كان :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ <}} f(x) = f(x_0)$$

مثال : الدوال التالية مستمرة على مجال تعريفها

1) $f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow Df =]0, +\infty[$

2) $f(x) = x^n \Longrightarrow Df = R$

3) $f(x) = \sin(x) \Longrightarrow Df = R$

II. عمليات على الدوال المستمرة:

اذا كانت f و g دالتين معرفتين من I نحو R ومستمرتين عند نفس النقطة $x_0 \in I$ حينئذ فان :

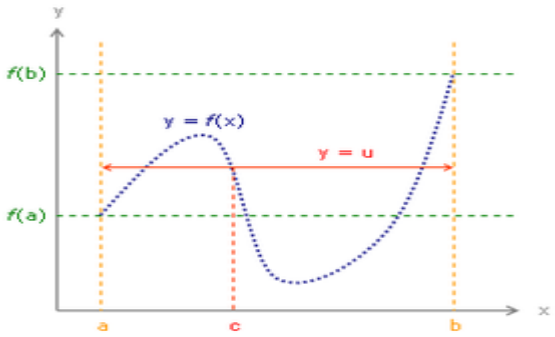
- $\lambda f(x)$ مستمرة عند x_0 $(\lambda \in R)$.
- $f + g$ مستمرة عند x_0 .
- $f * g$ مستمرة عند x_0 .

IV. نظرية القيم المتوسطة:

تعريف : لتكن f دالة معرفة كما يلي $f: I = [a, b] \longrightarrow R$ ، اذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ فانه :

$$\forall y = f(x) \in [f(a), f(b)] \Longrightarrow \exists \alpha \in [a, b]: f(\alpha) = y$$

الشكل (5.3):نظرية القيم المتوسطة



ملاحظة : في حال f دالة متناقصة نقول أن :

$$\forall y = f(x) \in [f(b), f(a)] \Longrightarrow \exists \alpha \in [a, b]: f(\alpha) = y$$

❖ **حالة خاصة** : لتكن f دالة مستمرة على مجال تعريفها :

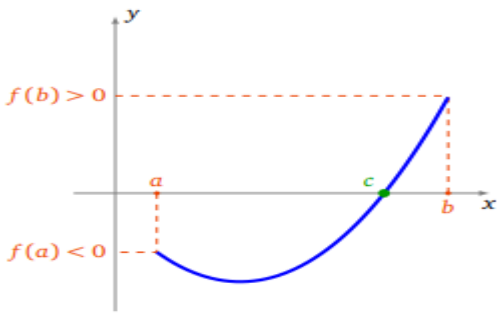
$$f: I = [a, b] \longrightarrow R$$

اذا كان :

$$f(a).f(b) < 0 \Longrightarrow \exists c \in [a, b] : \ f(c) = 0$$

هندسيا يعبر عن هذه الخاصية كما يلي :

الشكل (6.3): حالة خاصة من نظرية القيم المتوسطة



مثال : $f(x) = x^3 + x + 1$

f دالة معرفة و مستمرة على $[-1,1]$ حيث $f(-1) = -1$ و $f(1) = 3$.

اذن :

$$f(-1).f(1) = (-1) * (3) = (-3) < 0 \Longrightarrow \exists \alpha \in [-1,1] : f(\alpha) = 0$$

ملاحظة : اذا كانت f معرفة من R نحو R $(f: R \to R)$ ، و مستمرة أيضا على R علما أنه :

$$\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

فانه $\exists \alpha \in R : f(\alpha) = 0$

مثال: $f(x) = x^3 + x + 1$

f معرفة و مستمرة على R ، $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

حسب نظرية القيم المتوسطة فانه $\exists \alpha \in R : f(\alpha) = 0$

الفصل الرابع : الاشتقاق

I. *الاشتقاق عند نقطة:*

تعريف 1: لتكن f دالة معرفة من I نحو R: $f: I \to R$، نقول f أن تقبل الاشتقاق عند $x_0 \in I$ إذا كان المقدار $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ يقبل نهاية $l \in R$ لما x يؤول الى x_0 . نسمي l العدد المشتق ل f عند x_0 ونكتب :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = l$$

أو نكتب :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = l$$

مثال : $f(x) = \sqrt{x}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

تعريف 2 : نقول f أن تقبل الاشتقاق عند x_0 اذا كان المشتق من اليمين يساوي المشتق من اليسار ونكتب :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ > }} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ < }} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

تعريف 3 : f تقبل الاشتقاق على المجال I من R اذا كانت f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة $x \in I$ حيث $f'(x)$ هي الدالة المشتقة للدالة f و نكتب :

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

مثال : $f(x) = x^2$

f قابلة للاشتقاق عند $x_0 \in R$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0}(x - x_0) = 2x_0$$

ملاحظة : اذا كان $f: I \to R$ دالة معرفة من I نحو R فان :

- ❖ كل دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 فهي مستمرة عند x_0 .
- ❖ كل دالة قابلة للاشتقاق على I فهي مستمرة عند I ، و العكس غير صحيح .

مثال :

$$f(x) = x^2$$

f قابلة للاشتقاق على $\Longleftarrow$ f قابلة للاستمرار على $(\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2)$.

- $f(x) = |x|$ لندرس الاشتقاق و الاستمرار عند $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x \ \text{si} \ x \geq 0 \\ x \ \text{si} \ x \leq 0 \end{cases}$$

الاستمرارية :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(0) = 0$$

f قابلة للاستمرار عند $x = 0$.

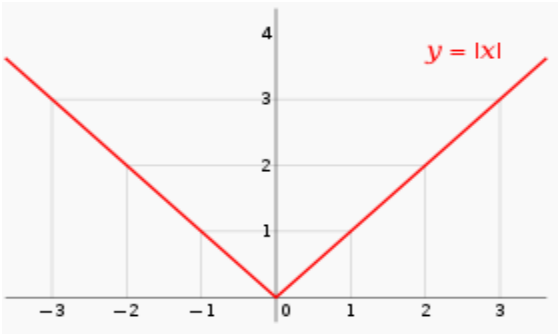
الاشتقاق :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x}{x} = 1$$

f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

الشكل (1.4) : منحنى القيمة المطلقة



II. عمليات على المشتقات : اذا كانت f و g دالتين معرفتين من I نحو R :

- $(f \mp g)'(x) = f'(x) \mp g'(x)$.
- $(\lambda * f)'(x) = \lambda * f'(x) \qquad \lambda \in R$.
- $(f * g)'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$.
- $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.
- $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f(x)^{-1})}$.

III.مشتقات بعض الدوال :اذا كانت f دالة معرفة من I نحو R فان :

- $f(x) = \alpha \implies f'(x) = 0 \qquad /\alpha \in R$.
- $f(x) = \alpha x \implies f'(x) = \alpha \qquad /\alpha \in R$

مثال : $f(x) = 2x \implies f'(x) = 2$

- $f(x) = x^n \implies f'(x) = n.x^{n-1}$.
- $(f^n(x))' = nf^{n-1}(x) * f'(x)$.

مثال :

$f(x) = (x^2 + 1)^n \implies f'(x) = n(x^2 + 1)^{n-1}(2x)$.

$f(x) = (x + 1)^3 \implies f'(x) = 3(x + 1)^2$.

$$f(x) = \sqrt{x} = (x)^{1/2} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}(x)^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- $(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2*\sqrt{f(x)}}$

مثال :

$$f(x) = \sqrt{(2x+1)} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{(2x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{(2x+1)}}$$

ملاحظة: الدالة $\sqrt{f(x)}$ هي من الشكل $f(x)^n$ حيث $n = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \left(f(x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}f(x)^{\frac{1}{2}-1} \times f'(x) = \frac{f'(x)}{2f(x)^{-\frac{1}{2}}}$$

- $f(x) = \cos\big(g(x)\big) \Longrightarrow\ f'(x) = -g'(x)\sin(g(x))$

مثال :

$$f(x) = \cos(x) \Longrightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = \cos\big(\sqrt{(2x+1)}\big) \Longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)}}\sin(x)$$

- $f(x) = \sin\big(g(x)\big) \Longrightarrow\ f'(x) = g'(x)\cos(g(x))$

مثال :

$$f(x) = \sin(x) \Longrightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \sin\left(\sqrt{(x^2+1)}\right) \Longrightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2+1)}}\cos(x)$$

الفصل الرابع : الاشتقاق

سلسلة الاستمرارية والاشتقاق:

التمرين الأول: f معرفة على R:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 2 - \sqrt{x^2 + 4}}{x} & si \quad x \neq 0 \\ \alpha \qquad si & x = 0 \end{cases}$$

- عيّن قيمة α حتى تكون f مستمرة عند $x = 0$

التمرين الثاني: f معرفة على R كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

- أدرس قابلية الاشتقاق لـ f على R

التمرين الثالث: f معرفة ومستمرة على $[0,1]$ حيث من أجل كل: $x \in [0,1]$

فإن: $f(x) \in [0,1]$

- بين أنه: $\exists\, \alpha \epsilon [0,1]: f(\alpha) = \alpha$

التمرين الرابع: f معرفة على R كما يلي:

$$f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$$

- تحقق أن: $\forall x \in R : \sqrt{1 + x^2}\, f'(x) = f(x)$
- استنتج أن: $\forall x \in R: (1 + x^2)\, f''(x) + xf'(x) = f(x)$

التمرين الخامس: أحسب مشتقة الدوال الأولى الآتية:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4}\ ;\ f(x) = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$$

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2+4}}\ ;\ f(x) = \ln(\sin x)$$

$$f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}}\ ;\ f(x) = \sin(2x^3 + 1)$$

$$f(x) = \cos(\ln x^2)\ ;f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{e^{x^2}}$$

التمرين السادس:

لتكن : $f(x) = (2x^2 - 7x + 5)^{e^x}$

- أحسب $f'(x)$ و $f''(x)$
- تحقق أن: $\forall x \in R : \quad f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$
- استنتج دالة أصلية لـ f على R

الفصل الرابع : الاشتقاق

حلول تمارين الاشتقاق:

التمرين الأول:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2-\sqrt{x^2+4}}{x} & si \quad x\neq 0\\ \alpha \qquad si & x=0\end{cases}$$

- f مستمرة عند 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\mapsto 0} f(x)=f(0)=\alpha$

$$\lim_{x\mapsto 0} f(x)=\frac{x+2-\sqrt{x^2+4}}{x}=\lim_{x\mapsto 0} f(x)\frac{(x+2)^2-\sqrt{x^2+4}^2}{x*(x-2-\sqrt{(x^2+4)})}$$

$$=\lim_{x\mapsto 0} f(x)\frac{4x}{x*(x-2-\sqrt{(x^2+4)})}=-1=\alpha$$

التمرين الثاني:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

كتابة $f(x)$ دون استعمال رمز القيمة المطلقة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}\Longrightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x||x-1|}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

الجدول رقم (1.4) : كتابة f(x) دون استعمال رمز القيمة المطلقة

			0	1
|x|	−x	−x	x	x
$\|x+1\|$	-x − 1	-x − 1	-x − 1	x + 1
f(x)	x	x	-x	x

$$\Longrightarrow \mathrm{f(x)} = \begin{cases} -x & si\ x \in]0;1[\\ x & si\ x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\\ 0 & si\ x = 0 \\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$$

● f قابلة للاشتقاق عند $x = 0 \Leftrightarrow lim_{x\to 0}^{<} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0}^{>} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$

$$\lim_{x\to 0}^{<} \frac{\mathrm{f(x)-f(0)}}{\mathrm{x-0}} = \lim_{x\to 0}^{<} \frac{x}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0}^{>} \frac{\mathrm{f(x)-f(0)}}{\mathrm{x-0}} = \lim_{x\to 0}^{>} \frac{-x}{x} = 1$$

$-1 \neq 1$ غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

● fقابلة للاشتقاق عند $x = 1 \Leftrightarrow lim_{x\to 1}^{<} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1}^{>} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} =$

$$\lim_{x\to 1}^{<} \frac{\mathrm{f(x)-f(1)}}{\mathrm{x-1}} = \lim_{x\to 1}^{<} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 1}^{>} \frac{\mathrm{f(x)-f(1)}}{\mathrm{x-1}} = \lim_{x\to 1}^{>} \frac{x}{x} = 1$$

$-1 \neq 1$ غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

التمرين الثالث :**اذا كانت** f معرفة ومستمرة على $[0,1]$ حيث من أجل كل: $x \in [0,1]$

فإن: $f(x) \in [0,1]$ أي :

$$x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \in [0,1]$$

نضع : $g(x) = f(x) - x$

$$f(0) \geq 0 \Rightarrow f(0) - 0 \geq 0 \Rightarrow g(0) \geq 0$$

$$f(1) \leq 1 \Rightarrow f(1) - 1 \leq 1 - 1 \leq 0 \Rightarrow g(1) \leq 0$$

نلاحظ أنه:

$$\forall x \in [0;1]: g(0) * g(1) < 0$$

فحسب نظرية القيم المتوسطة:

$$\exists \alpha \in [0;1]: g(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\alpha) - \alpha = 0 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha$$

التمرين الرابع :

$$f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$$

$$\forall x \in R:\ f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\, f'(x) = \sqrt{1+x^2} + x$$

$$\bullet \sqrt{1+x^2}\, f'(x) = \sqrt{1+x^2} + x \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, f'(x) + f''(x)\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x\, f'(x) + (1+x^2) f''(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\Longrightarrow x\,f'(x) + (1+x^2)f''(x) = f(x)$

التمرين الخامس:

1) $f(x) = \sqrt{x^2+4} \Longrightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

2) $f(x) = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2 \Longrightarrow f'(x) = 2 * \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)\frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x-1)^2} = 2\frac{(2x+1)}{(x-1)^3}$

3) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+4}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}e^{\sqrt{x^2+4}}$

4) $f(x) = \ln(\sin x) \Longrightarrow f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

5) $f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x-1}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$

6) $f(x) = \sin(2x^3+1) \Longrightarrow f'(x) = 6x^2\cos(2x^3+1)$

7) $f(x) = \cos(\ln x^2) \Longrightarrow f'(x) = \frac{2}{x}\sin(\ln x^2)$

8) $f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{e^{x^2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{\frac{2}{2x+1}e^{x^2} - 2xe^{x^2}\ln(2x+1)}{e^{2x^2}} = \frac{2-2x\ln(2x+1)}{e^{x^2}}$

التمرين السادس:

$$f(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$$

$f'(x) = (4x-7)e^x + (2x^2-7x+5)e^x = (2x^2-3x-2)e^x$

$f''(x) = (4x-3)e^x + (2x^2-3x-2)e^x = (2x^2+x-5)e^x$

- $4e^x + 2f'(x) - f''(x) = 4e^x + 2(2x^2-3x-2)e^x - (2x^2+x-5)e^x$
  $= (2x^2-7x+5)e^x = f(x)$
- $\int f(x)dx = \int 4e^x + 2f'(x) - f''(x)dx = 4\int e^x\,dx + 2\int f'(x)\,dx - \int f''(x)\,dx$

$\Longrightarrow \int f(x)dx = 4\,e^x + 2f(x) - f'(x) + c$

I. الدالة الأصلية:

تعريف: لتكن fدالة معرفة على المجال I نحو R $(I \longrightarrow R)$ نقول أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال I إذا كانت F قابلة للاشتقاق على Iحيث : $F' = f$ ونكتب $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

مثال: $F_1 = X^3 \; ; \; F_2 = X^3 + 1 \; ; \; F_3 = X^3 + \frac{1}{3}$

$F_1; F_2; F_3$ هي دوال أصلية للدالة $f(x) = 3X^2$ على R

نظرية: إذا كانت f مستمرة على المجال I من R نحو R فإن:

- إذا كانت f مستمرة على المجال I فإن f تقبل على الأقل دالة أصلية واحدة (واحدة أو أكثر)
- إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن مجموعة الدوال الأصلية لـ f على I هي من الشكل: $F_i(x) + c$ حيث: $c \in R$
- إذا كانت $(x_0, y_0) \in I \times R$ فإنه يوجد دالة أصلية وحيدة F لـ f على I تحقق الشرط $F(x_0) = y_0$

II. دوال أصلية شهيرة:

لتكن f دالة معرفة I نحو R إذا كان:

- $f(x) = \alpha \Rightarrow F(x) = \alpha x + c \qquad \alpha \in R, c \in R$
- $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \in R - \{-1\}$

مثال: $f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + c \qquad c \in R$

$$f(x) = \sqrt{x} = (x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \qquad I =]0, +\infty[$$

- $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow F(x) = \sqrt{x} + c \qquad I =]0, +\infty[$

- $f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x + c \quad I = R$
- $f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos x + c \quad I = R$
- $f(x) = shx \Rightarrow F(x) = ch(x) + c \quad I = R$
- $f(x) = chx \Rightarrow F(x) = sh(x) + c \quad I = R$
- $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow F(x) = \tan x \qquad I = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$
- $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow F(x) = \cot an\, x \qquad I =]k\pi, (K+1)\pi[$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow F(x) = Arc\sin x \quad I =]-1,1[$
- $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow F(x) = Arc\tan x + c \quad I = R$
- $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} Arc\tan \frac{x}{a} \quad I = R$

في الحالة العامة إذا كانت الدالة f مرفقة مع مشتقتها f' فإن الدالة الأصلية F تعطى كما يلي:

- $\int f' . f^{\alpha} = \frac{f_{(x)}^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad I \in R - \{-1\}$

مثال:

$$f(x) = 2x(x^2+1) \Rightarrow F(x) = \int 2x(x^2+1)dx = \frac{(x^2+1)^2}{2} + c$$

$$f(x) = n(nx+1)^3 \Rightarrow F(x) = \int n(nx+1)^3 dx = \frac{(nx+1)^4}{4} + c\ ;\ n \in N;\ c \in R$$

- $\int \frac{f'}{f^n} dx = \int f' . f^{-n} dx = -\frac{1}{(n-1)f^{n-1}} + c \qquad n \in N - \{0,1\}$

مثال:

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2+3)^4} \Rightarrow \int f(x)dx = -\frac{1}{3(x^2+3)^3} + c$$

$$f(x) = \frac{x + \frac{1}{2}}{(x^2+x)^3} \Rightarrow \int f(x)dx = \int f(x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2(x^2+x)^2}\right] = -\frac{1}{4} . \frac{1}{(x^2+x)^2}$$

- $\int f' \sin f(dx = -\cos\big(f(x)\big) + c$

مثال:

$$f(x) = (x+1)\sin(x^2+2x+1)$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int (x+1)\sin(x+1)^2 dx = \frac{1}{2}\int 2(x+1)\sin(x+1)^2 dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(x+1)^2 + c$$

- $\int f'.\cos f(x)dx = \sin f(x) + c$

مثال:

$$f(x) = x\cos(x^2+1) \Rightarrow \int x^2\cos(x^3+1)\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\cos(x^3+1)dx$$

$$= \frac{1}{3}\sin(x^3+1) + c$$

- $f(x)\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = \int f'.f^{-\frac{1}{2}}dx = 2f^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{f(x)}$

مثال :

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow \int \frac{4}{\sqrt{2x+1}}dx = 2\int \frac{2}{\sqrt{2x+1}}dx = 2.2\sqrt{2x+1} + c$$

$$= 4\sqrt{2x+1} + c$$

- $\int f'(x).\sinh\big(f(x)\big)dx = \cosh\big(f(x)\big) + c$

مثال:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\sinh\sqrt{2x+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\sinh\sqrt{2x+1}\,dx = \cosh\sqrt{2x+1} + c$$

- $\int f'(x).\cosh f(x)\,dx = \sinh f(x) + c$

مثال:

$$f(x) = 2\cosh x \Rightarrow \int 2\cosh x\,dx = 2\int \cosh x\,dx = 2\sinh x + c$$

- $\int \frac{f'}{\cos^2 f(x)}\,dx = \tan f(x) + c$

مثال:

$$f(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)} \Rightarrow \int \frac{2x}{\cos^2(x^2)}\,dx = \tan x^2$$

- $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2}(x)}\,dx = \sin^{-1} f(x) + c$

مثال:

$$f(x) = \frac{\sinh(x)}{\sqrt{1-\cosh^2(x)}} \int \frac{\sinh(x)}{\sqrt{1-\cosh^2(x)}}\,dx = \sinh^{-1}(\operatorname{csch}(x))$$

- $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \tan^{-1} f(x) + c$

مثال:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}(x) + c$$

III. التكامل المحدود:

تعريف: لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال $I = [a, b]$ من R نحو R نرمز لمساحة الحيز المحصور بين $x = a$ و $x = b$ وبين $y = f(x)$ و $y = 0$ كما يلي: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ حيث $F(x)$ هي دالة أصلية لـ $f(x)$ على المجال $I = [a, b]$

خاصية 1: لتكن f و g دالتين معرفتين و مستمرتين من $I = [a, b]$ نحو R، α و β أعداد حقيقية فإن:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

مثال: أحسب مساحة الحيز المحصور من x=3 و x=4 ومنحنى f ومحور الفواصل حيث :

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$\int_3^4 f(x)dx = \int_3^4 3x^2 + 2x + 1dx = 3\int_3^4 x^2dx + 2\int_3^4 xdx + \int_3^4 dx$$

$$= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_3^4 + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^4 + [x]_3^4$$

$$= [64 - 27] + [16 - 9] + [4 - 3]$$

$$= 37 + 7 + 1 = 45\ cm^2$$

خاصية 2: إذا كانت f و g دالتان معرفتان ومستمرتان على $I = [a, b]$ نحو R حيث $f(x) \leq g(x)$ فإنه:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

خاصية 3: علاقة شال

إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة على المجال $I = [a, b]$ نحو R و $c \in [a, b]$ فإنه:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

IV. التكامل بالتجزئة.

تعريف: لتكن f و g دالتان معرفتان من $I = [a, b]$ من R نحو R، فإنه:

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)dx = [f.g]_a^b - \int_a^b f(x).g'(x)dx$$

البرهان:

$$(f.g)' = f'g + f.g'$$

$$\Rightarrow \int_a^b (f.g)'dx = [f.g]_a^b \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\int_a^b (f.g)'dx = \int_a^b f'.g\,dx + \int_a^b f.g'dx \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

من (1) و (2) نجد :

$$\int_a^b f'.g\,dx + \int_a^b f.g'dx = [f.g]_a^b$$

$$\Rightarrow \int_a^b f'.g\,dx = [f.g]_a^b - \int_a^b f.g'dx$$

مثال: بواسطة التكامل بالتجزئة أحسب: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin x\,dx$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'g\,dx = [f,g]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f.g'dx$$

نضع:

$$f' = \sin x\,dx \Rightarrow f = -\cos x$$

$$g = x \quad \Rightarrow g' = dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = [-x\cos x] + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x = [-x\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + [\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

V. *التكامل بتبديل المتغير:*

تعريف: ليكن g تطبيق معرف من $I = [a, b]$ نحو R و f دالة معرفة من $g(I): [g(a); g(b)]$ نحو R ومستمرة على هذا المجال: $f: [g(a). g(b)] \to R$

$$\forall (a, b) \in I \ : \quad \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f\big(g(x)\big). g'(x)dx$$

مثال: أحسب التكامل الآتي:

$$\int_1^2 (\sqrt{x} + 1)^n dx$$

نضع: $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$$\Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\, dt = 2t\, dt$$

$$\Rightarrow \int_1^2 (\sqrt{x} + 1)^n dx = \int_1^{\sqrt{2}} 2t(t + 1)^n dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} (t + 1 - 1)(t + 1)^n dt$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{2}} (t + 1)^{n+1} dt - \int_1^{\sqrt{2}} (t + 1)^n dt$$

$$= 2\left[\frac{(t+1)^{n+2}}{n+2}\right]_1^{\sqrt{2}} - \left[\frac{(t+1)^{n+1}}{n+1}\right]_1^{\sqrt{2}}$$

الفصل الخامس : التكامل

سلسلة الدوال الأصلية:

التمرين الأول: لتكن: $f(x) = 2x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 1$

- عين الدالة الأصلية الوحيدة F لـ f على المجال $]0, \infty[$ والتي تحقق $F(1)=2$.

التمرين الثاني: لتكن $f(x) = \frac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$ معرفة على المجال $]-1,1[$

- عين العددين الحقيقين a، b بحيث $\forall x \in]-1,1[: f(x) = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x+1)^3}$
- استنتج الدوال الأصلية لـ f على $]-1,1[$

التمرين الثالث: عين الدوال الأصلية للدوال التالية:

1) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 2$
2) $f(x) = (2x + 1)(3x - 4)$
3) $f(x) = (2x^2 - 1)^2$
4) $f(x) = \frac{3x^4-2x^2-x+1}{3x^2}$

التمرين الرابع: أحسب ما يلي:

1) $\int_{-1}^{2}(-3x^2 + 1)dx$
2) $\int_{0}^{1} e^{2X-1}dx$
3) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x}dx$
4) $\int_{1}^{2} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$
5) $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^3}$
6) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)dx$

التمرين الخامس: أحسب:

$$I = \int_{-2}^{2} |x^2 - 1| dx$$

التمرين السادس: باستعمال متغير مناسب أحسب:

1) $\int (x+1)(x^2+2x+1)^4 dx$
2) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$
3) $\int \frac{\ln x}{x} dx$
4) $\int \frac{2}{3x+2} dx$
5) $xe^{x^2} dx$
6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

التمرين السابع: باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب:

1) $\int x^3 \ln x \, dx$
2) $\int (x+1)^4 x \, dx$
3) $\int (x^2+1)e^x dx$
4) $\int \sin(\ln x) dx$

حلول تمارين الدوال الأصلية:

التمرين الأول:

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 1$$

$$\forall x \in R^+ - \{0\} : \int f(x)\,dx = \int 2x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\,dx + 1\,dx$$

$$\Rightarrow F(x) = 2\int x\,dx + \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x^2}dx + \int dx + c$$

$$= \frac{2x^2}{2} + \ln x + \frac{1}{x} + x + c$$

$$F(1) = 2 \Rightarrow 3 + c = 2 \Rightarrow c = 1$$

التمرين الثاني:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{(x^2 - 1)^3}$$

$$D_f =]-1,1[$$

$$\forall x \in]-1,1[: \quad f(x) = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x+1)^3} \qquad -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{ax^3 + 3ax^2 + 3ax + a + bx^3 - 3bx^2 + 3bx + b}{(x^2 - 1)^3}$$

$$= \frac{(a+b)x^3 + 3(a-b)x^2 + 3(a+b)x + (a+b)}{(x^2 - 1)^3}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a + b = 1 \Rightarrow a = 1 - b \\ a - b = 0 \Rightarrow a = b \\ \Rightarrow a = b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

إذن:

$$f\ \forall x \in]-1,1[: \quad f(x) = \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{1}{2(x+1)^3}$$

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{1}{2(x+1)^3}\,dx \qquad -2$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$$

$$F(x) = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x+1)^2}\right] + c$$

التمرين الثالث:

1) $\int f(x)dx = 3\int x^4dx - 2\int x^3dx + 5\int x^2dx - 3\int x\,dx + 2\int dx + c$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3\frac{3}{2}x^2 + 2x + c$$

2) $\int f(x)dx = \int(2x+1)(3x-4)dx = 6\int x^2dx - 5\int xdx - 4\int dx$

$$= 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 4x + c$$

3) $\int(2x^2-1)^2dx = 4\int x^4dx + \int dx - 4\int x^2dx + c$

$= \frac{4}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + x + c$

4) $\int \frac{3x^4-2x^2-x+1}{3x^2}dx = \int x^2dx - \frac{2}{3}\int dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2}dx + c$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}.\frac{1}{x} + c$

التمرين الرابع:

1) $\int_{-1}^{2}(-3x^2+1)dx = -3\int_{-1}^{2}x^2dx + \int_{-1}^{2}dx = [x^3]_{-1}^{2} + [x]_{-1}^{2}$

$$= 8 + 3 + 2 + 1 = 14$$

2) $\int_0^1 e^{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2e^{2x-1}dx = \frac{1}{2}[e^{2x-1}]_0^1 = \frac{1}{2}[e - e^{-1}]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^2-1}{e}\right]$

3) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1$

4) $\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \left[\sqrt{x}\right]_1^2 = \sqrt{2} - \sqrt{1}$

5) $\int_2^3 \frac{dx}{x^3} = -\left[\frac{1}{2x^2}\right]_2^3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{18}$

6) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 2\sin(2x)dx = -\frac{1}{2}[\cos 2x]_{-\pi}^{\pi}$

$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

التمرين الخامس:

$$I = \int_{-2}^{2} |x^2 - 1|\, dx = \int_{-2}^{2} |(x-1)(x+1) - |dx$$

	-2	-1	1	2
$x-1$	-	$-$	+	
$x+1$	$-$	+	+	
$\lvert(x-1)(x+1)\rvert$	+	$-$	+	

$$\Rightarrow \int_{-2}^{2} |x^2 - 1|dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)dx + \int_{-1}^{1} -(x^2 - 1)dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)dx$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{2} |x^2 - 1|dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{2} = 13/3$$

التمرين السادس:

1) $\int (x+1)(x^2 + 2x + 1)^4 dx = \int (x+1)^5\, dx$

بوضع :

$$y = (x+1) \Longrightarrow dy = dx \Longrightarrow \int (x+1)^5\, dx = \int y^5 dy = \frac{y^6}{6} + c$$

$$\Longrightarrow \int (x+1)^5\, dx = \frac{(x+1)^6}{6} + c.$$

2) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

بوضع:

$$y = \cos x \Rightarrow dy = -\sin x dx \Rightarrow -\int \frac{-\sin x}{\cos^3 x} dx = -\int \frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2y^2} + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{2\cos^2 x} + c$$

3) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

بوضع:

$$y = \ln x \Rightarrow dy = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = \int y dy = \frac{y^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

4) $\int \frac{2}{3x+2} dx$

بوضع :

$$y = 3x + 2 \Rightarrow dy = 3dx \Rightarrow \int \frac{2}{3x+2} dx = \frac{2}{3}\int \frac{3}{3x+2} dx = \frac{2}{3}\int \frac{dy}{y}$$

$$= \frac{2}{3}\ln|y| + c = \frac{2}{3}\ln|3x+2| + c$$

5) $\int x e^{x^2} dx$

بوضع :

$$y = x^2 \Rightarrow dy = 2x dx \Rightarrow \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^y dy = \frac{1}{2}e^y + c$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

بوضع :

$$y = \ln x \Longrightarrow dy = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} + c = 2\sqrt{\ln x} + c$$

التمرين السابع :

1) $\int x^3 \ln x \, dx$

نضع :

$$U = \ln x \Longrightarrow dU = \frac{1}{x}dx$$

$$dV = x^3 dx \Longrightarrow V = \frac{x^4}{4}$$

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{x}dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{16}x^4 + c$$

2) $\int (x+1)^4 x \, dx$

نضع :

$$U = x \Longrightarrow dU = dx$$

$$dV = (x+1)^4 dx \Longrightarrow V = \frac{(x+1)^5}{5}$$

$$\int (x+1)^4 x \, dx = \frac{(x+1)^5}{5}x - \int \frac{(x+1)^5}{5}dx = \frac{(x+1)^5}{5}x - \frac{(x+1)^6}{30} + c$$

3) $\int (x^2+1)e^x dx$

نضع :

$$U = (x^2+1) \Longrightarrow dU = 2x dx$$

$$dV = e^x dx \Longrightarrow V = e^x$$

$$\int (x^2+1)e^x dx = (x^2+1)e^x - \int 2x\, e^x dx = (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx$$

$$= (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

4) $\int \sin(\ln x)dx$

نضع:

$$U = \sin(\ln x) \Longrightarrow dU = \frac{1}{x}\cos(\ln x)dx$$

$$dV = dx \Longrightarrow V = x$$

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

نكامل بالتجزئة للمرة الثانية الدالة : $\cos(\ln x)dx$

نضع:

$$g = \cos(\ln x) \Longrightarrow dg = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx$$

$$dh = dx \Longrightarrow h = x$$

$$\Longrightarrow \int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx$$

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$$

$$\Longrightarrow 2\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) = \frac{x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)}{2} + c$$

الفصل السادس : الدالة الأسية

I. **تعريف** : تعرف الدالة الأسية على أنها الدالة $f(x)$ الوحيدة القابلة للاشتقاق على R بحيث :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

نرمز للدالة الاسية كما يلي : $f(x) = e^x$.

- **نظرية 1** : لتكن $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على R بحيث $f(x) = e^x$ *فانه :*

$$\forall x \in R : f(x) * f(-x) = 1$$

أي أن الدالة الاسية $f(x) = e^x$ لا تنعدم على R .

- **البرهان**: لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق على R بحيث : $f'(x) = f(x)$ و $f(0) = 1$ ولتكن

$$g(x) = f(x) * f(-x) .$$

$$g'(x) = f'(x).f(-x) + f(x) * (-1)f'(-x)$$

$$g'(x) = f'(x).f(-x) - f(x) * f(-x) \qquad (f=f')$$

$$g'(x) = 0$$

لدينا أيضا:

$$g(0) = (f(0))^2 = 1$$

II. خصائص الدالة الأسية:

1) $\forall x, y \in R : e^{x+y} = e^x * e^y.$

2) $\forall x, y \in R : e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

3) $e^1 = 2.71..$

4) $\forall x \in R : e^x \neq 0 ; \frac{1}{e^x} = e^{-x}$

5) $\forall x \in R: (e^x)^n = e^{nx}$

مثال : بسط العبارتين التاليتين : $\frac{(e^\alpha)^2 * e^\alpha}{e^{4\alpha}}$ و $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$

$$\frac{(e^\alpha)^n * e^\alpha}{e^{4\alpha}} = e^{2\alpha+\alpha-4\alpha} = e^{-\alpha}$$

$$(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2e^0 - e^{2x} - e^{-2x} + 2e^0$$

$$(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 2e^0 + 2e^0 = 4$$

IV. دراسة تغيرات الدالة الأسية و بعض الخصائص التحليلية :

1. مجموعة التعريف : الدالة الاسية $f(x) = e^x$ تكون معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية R .

2. النهايات : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

3. المشتقة : $\forall x \in R: f'(x) = e^x > 0$

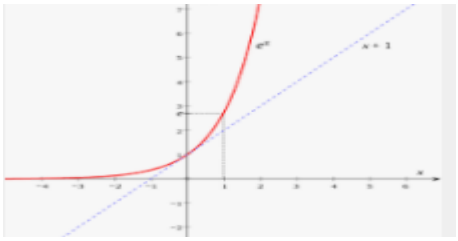
4. جدول التغيرات : **يعطى جدول تغيرات الدالة** $f(x) = e^x$ كما يلي :

الجدول رقم (1.6): جدول تغيرات الدالة الاسية

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
exp	0	↗	$+\infty$

5. منحنى الدالة $f(x) = e^x$: يعطى منحنى الدالة الاسية كما يلي

الشكل رقم (1.6): منحنى الدالة الاسية



6. نهايات أسية شهيرة :

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x.e^{x} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}-x}{e^{x}-1} = 1.$

تمرين: لتكن الدالة f معرفة كايلي :

$$f(x) = x.e^{-x^2}$$

1) أحسب مشتقة f .

2) بين ان f زوجية .

3) بين أن : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2.x^2}{e^{2x^2}}}$.

4) استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5) أدرس تغيرات f و أرسم المنحنى الممثل لها .

الحل :

1) $\forall x \in R: f'(x) = e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$

2) f زوجية $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = (-x)e^{-(-x)^2} = -xe^{-x^2} = -f(x)$$

اذن f زوجية .

3) $\forall x \in R: f(x) = xe^{-x^2} = \sqrt{x^2}.\sqrt{e^{-x^2}e^{-x^2}} = \sqrt{x^2}.\sqrt{e^{-x^2-x^2}} = \sqrt{x^2e^{-2x^2}} = \sqrt{\frac{2x^2}{2e^{2x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2x^2}{2e^{2x^2}}}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2x^2}{2e^{2x^2}}} = \sqrt{0} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ?$

بوضع $(X = -x)$ وبما أن f *زوجية فان :*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -f(-x) = \lim_{x\to+\infty} -f(X) = 0$$

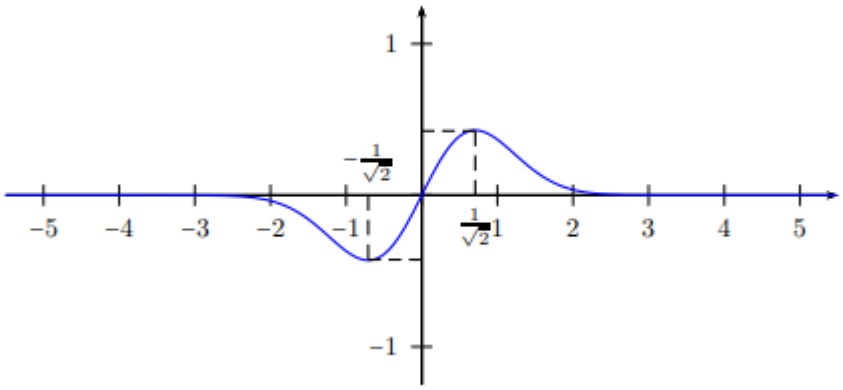
5) $\forall x \in R : f'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2} = 0 \Longrightarrow (1-2x^2) = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}; x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

6) جدول التغيرات و المنحنى:

الجدول رقم (2.6): جدول تغيرات الدالة $f(x) = x.e^{-x^2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↘	$-\frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}$	↗	$\frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}$	↘	0

الشكل رقم (2.6): منحنى الدالة $f(x) = x.e^{-x^2}$



V. المشتقة من الشكل : $f(x) = e^{g(x)}$

تعريف : اذا كانت f دالة من الشكل $f(x) = e^{g(x)}$ *فان* المشتقة الأولى تعطى كما يلي :

$$f'(x) = g'(x).e^{g(x)}$$

مثال :

- $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = (x)'.e^x = e^x$
- $f(x) = e^{x^2} \Longrightarrow f'(x) = (x^2)'.e^{x^2} = 2xe^{x^2}$
- $f(x) = e^{\sqrt{x+1}} \Longrightarrow f'(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)'.e^{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}e^{\sqrt{x+1}}$
- $f(x) = e^{x^2+2x+1} \Longrightarrow f'(x) = (2x+2).e^{x^2+2x+1}$
- $f(x) = e^{\sin(x)} \Longrightarrow f'(x) = (\sin(x))'.e^{\sin(x)} = \cos(x)e^{\sin(x)}$

VI. الدالة الأصلية للدالة الأسية :

تعريف : لتكن f دالة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية R حيث $f(x) = e^x$ ، نسمي $F(x)$ الدالة الأصلية للدالة f حيث :

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad ; c \in R$$

اذا كانت f *من الشكل* $f(x) = g(x)e^{g(x)}$ فان :

$$\int f(x)dx = \int g(x)e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)} + c \qquad ; c \in R$$

مثال :

$$f(x) = e^x \Longrightarrow \int f(x)dx = \int (x)'e^x\,dx = e^x + c \qquad ; c \in R$$

$$f(x) = e^{2x+1} \Longrightarrow \int f(x)dx = \int (2x+1)'e^{2x+1}\,dx = 2e^{2x+1} + c \qquad ; c \in R$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}e^{\sqrt{x^2+1}} \Longrightarrow \int f(x)dx = e^{\sqrt{x^2+1}} + c \qquad ; c \in R$$

تمارين حول الدالة الأسية

التمرين الأول : **حل في** $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $e^{x-1} = e$

2) $e^{\sin(x)+1} = 1$

3) $e^{1-2\ln(x)} = 1$

4) $e^{2x} - 2e^{x} + 1 = 0$

5) $\ln e^{x+1} = 1$

6) $e^{x}(e^{x} - 4) = 0$

التمرين الثاني : **حل في** $\mathbb{R}$ الجمل التالية :

$$S_1 = \begin{cases} e^{x} + e^{y} = 5 \\ e^{x} - e^{y} = 3 \end{cases} \quad ; \quad S_2 = \begin{cases} xy = -15 \\ e^{x}e^{y} = e^{-2} \end{cases}$$

التمرين الثالث : أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4 + e^{x})$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x + 4e^{x})$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{1+e^{x}}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{e^{x}-1}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x+1}$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$

التمرين الرابع : أحسب مشتقة الدوال التالية :

1) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$

2) $f(x) = e^{2x+1/x}$

3) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$

4) $f(x) = \sqrt{e^{x+1}}$

5) $f(x) = e^{x^2+2x+1}$

6) $f(x) = \sin(e^{x^2+1})$

التمرين الخامس : لتكن الدالة f دالة معرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) بين أن : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

التمرين السادس : لتكن الدالة f دالة معرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{3}{e^{-x} + 1}$$

1) بين أن : $f(x) = \frac{3e^x}{1+e^x}$

2) استنتج دالة أصلية F *للدالة* f بحيث $F(0) = 0$

التمرين السابع : أحسب التكامل التالي :

1) $\int_0^1 (e^{2x} + 2e^x - 3)dx$

2) $\int_0^1 \frac{e^{-x}-2}{e^x} dx$

3) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$

4) $\int_1^2 xe^{x^2} dx$

التمرين الثامن : بواسطة التكامل بالتجزئة أحسب ما يلي :

1) $\int_{-1}^0 (x + 2)e^x dx$

2) $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$

حلول تمارين الدالة الأسية

التمرين الأول :

1) $e^{x-1} = e \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

2) $e^{\sin(x)+1} = 1 \Rightarrow \sin(x) + 1 = 0 \Rightarrow \sin(x) = -1$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in R$$

3) $e^{1-2\ln(x)} = 1 \Rightarrow 1 - 2\ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{1/2}$

4) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$

بوضع $y = e^x$ نجد :

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y = 1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

5) $\ln e^{x+1} = 1 \Rightarrow x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$

6) $e^x(e^x - 4) = 0 \Rightarrow e^x > 0 \Rightarrow e^x - 4 = 0 \Rightarrow x = \ln(4)$

التمرين الثاني:

$$S_1 = \begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^x - e^y = 3 \end{cases}$$

بوضع $X = e^x$ و $Y = e^y$ نجد :

$$S_1 = \begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^x - e^y = 3 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \begin{cases} X + Y = 5 \\ X - Y = 3 \end{cases} S_1 = \begin{cases} Y = 5 - X \\ X - (5 - X) = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = 4 \vee Y = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x = 4 \\ e^y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \ln(4) \\ y = 0 \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} xy = -15 \\ e^x e^y = e^{-2} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \begin{cases} xy = -15 \\ x + y = -2 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \begin{cases} y = -15/x \\ x - 15/x = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_2 = \begin{cases} y = -15/x \\ x^2 + 2x - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 = -5 \Rightarrow y_1 = 3) \wedge (x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = -5)$$

التمرين الثالث :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4 + e^x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 + \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x + 4e^x) = +\infty + 0 = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{1+e^x} = \frac{3}{1+0} = 3$

4) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{e^x-1} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ <}} \frac{1}{e^x-1} = -\infty \wedge \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} \frac{1}{e^x-1} = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x+1} = -\infty$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x+1-1}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{e^x+1} + 1 = 0$

التمرين الرابع :

1) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} e^{\sqrt{x^2+1}}$

2) $f(x) = e^{2x+1/x} \Rightarrow f'(x) = (2 - 1/x^2)e^{2x+1/x}$

3) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(e^x-1)-(e^x)(e^x+1)}{(e^x-1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$

4) $f(x) = \sqrt{e^{x+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^{x+1}}{2\sqrt{e^{x+1}}}$

5) $f(x) = e^{x^2+2x+1} \Rightarrow f'(x) = (2x + 2)e^{x^2+2x+1}$

6) $f(x) = \sin(e^{x^2+1}) \Rightarrow f'(x) = 2xe^{x^2+1}\cos(e^{x^2+1})$

التمرين الخامس :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x+1-1}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{e^x+1} + 1 = 0$

2) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x}{e^x}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)=1$

التمرين السادس :

$$f(x)=\frac{3}{e^{-x}+1}$$

1) $f(x)=\frac{3}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{3e^x}{1+e^x}$

2) $\int f(x)dx=\int\frac{3e^x}{1+e^x}dx=3[\ln(1+e^x)]+c=F(x)$

3) $F(0)=0\Longrightarrow 3[\ln(1+e^0)]+c=0\Longrightarrow c=3ln2$

التمرين الثامن :

1) $\int_0^1(e^{2x}+2e^x-3)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2e^{2x}dx+2\int_0^1 e^x dx-3\int_0^1 dx$

$$\int_0^1(e^{2x}+2e^x-3)dx=\frac{1}{2}[e^{2x}]_0^1+2[e^x]_0^1-3[x]_0^1$$

$$=\frac{e^4}{2}+2e^2-\frac{5}{2}e-3$$

2) $\int_0^1\frac{e^{-x}-2}{e^x}dx=\int_0^1 e^{-x}(e^{-x}-2)dx=-\left[\frac{(e^{-x}-2)^2}{2}\right]_0^1$

$$\int_0^1\frac{e^{-x}-2}{e^x}dx=-\frac{(e^{-2}-2)^2}{2}+\frac{1}{2}$$

3) $\int_0^1\frac{1}{(e^x+1)}dx=\int_0^1\frac{e^x-e^x+1}{e^x+1}dx=\int_0^1 dx-\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx$

$$=[x]_0^1-[\ln(e^x+1)]_0^1=1-\ln(e+1)+\ln(2)$$

4) $\int_1^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^2 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_1^2=\frac{1}{2}[e^4-e^2]$

التمرين الثامن:

1) $\int_{-1}^0(x+2)e^x dx$

بوضع :

$$f=(x+2)\Longrightarrow f'=dx$$

$g' = e^x dx \Longrightarrow g = e^x$

$$\int f g' = f * g - \int g f' \Longrightarrow \int_{-1}^{0} (x+2)e^x dx = [(x+2)e^x]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^x dx$$

$$= [2 - e^{-1}] - [1 - e^{-1}] = 1$$

2) $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$

بوضع :

$f = e^x \Longrightarrow f' = e^x dx$

$g' = \cos(x)dx \Longrightarrow g = \sin(x)$

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x dx = [e^x \sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x dx \dots\dots\dots (1)$$

نكامل مرة أخرى بالتجزئة $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ لنجد :

$f = e^x \Longrightarrow f' = e^x dx$

$g' = \sin(x)\, dx \Longrightarrow g = -\cos(x)$

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx = [-e^x \cos(x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos(x)\, dx \dots\dots\dots (2)$$

بتعويض (2) في (1) نجد:

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x dx = [e^x \sin(x)]_0^{\pi} + [e^x \cos(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos(x)\, dx$$

$$\Longrightarrow 2\int_0^{\pi} e^x \cos x dx = [e^x \sin(x)]_0^{\pi} + [e^x \cos(x)]_0^{\pi}$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\pi} e^x \cos x dx = \frac{[e^x \sin(x)]_0^{\pi} + [e^x \cos(x)]_0^{\pi}}{2} = 1 - e^{\pi}$$

الفصل السابع : الدالة اللوغاريتمية

I. تعريف : ليكن x عدد حقيقي موجب ، نسمي اللوغاريتم الطبيعي لـx العدد الحقيقي $\ln(x)$ ى الذي أسيته x و نكتب :

$$f :]0;+\infty[\longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow f(x) = \ln(x)$$

حيث : $\ln(1) = 0; \ln(e) = 1; e^{\ln x} = x$.

- **نظرية** : من أجل كل عدد حقيقي a و b حيث $b > 0$ و نكتب :

$$e^a = b \Leftrightarrow a = \ln(b)$$

و من أجل كل عدد حقيقي $a > 0$ و $b \in \mathbb{R}$ نكتب :

$$\ln(a) = b \Leftrightarrow a = e^b$$

- اذا كان : $\forall x \in R : \ln(e^x) = x$
- اذا كان : $\forall x \in]0;+\infty[: e^{\ln(x)} = x$

مثال : حل في $\square$ المعادلة التالية : $\ln(2x+3) = 2$

$$\forall x \in \left]-\frac{3}{2};+\infty\right[: \ln(2x+3) = 2 \Longrightarrow 2x+3 = e^2 \Longrightarrow x = \frac{e^2-3}{2}$$

II. خصائص جبرية للدالة اللوغاريتمية :

- $\forall (x;y) \in \square^{*+} \times \square^{*+} : \ln(x*y) = \ln(x) + \ln(y)$.

مثال : $\ln(e^2) = 2\ln(e) = 2 \Leftrightarrow \ln(e^2) = \ln(e*e) = \ln(e) + \ln(e) = 2$

- $\forall (x;y) \in \square^{*+} \times \square^{*+} : \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

مثال : $\ln\left(\frac{e}{e^2}\right) = \ln(e^{-1}) = -1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e}{e^2}\right) = \ln(e) + \ln(e^{-2}) = 1 - 2 = -1$

- $\forall x \in \square^{*+} : \ln x^n = n\ln(x)$
- $\forall x \in \square^{*+} : \ln\frac{1}{x} = -\ln(x)$

- $\forall x \in \square^{*+} : \ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln(x)$
- $\forall x \in \square^{*+} : \ln(\prod x_i) = \sum_i^n \sum \ln(x_i)$

III. دراسة تغيرات الدالة $f(x) = \ln(x)$

1. **مجموعة التعريف** : اذا كانت $f(x) = \ln(x)$ فان مجموعة التعريف تعطى كما يلي : $D_f =]0; +\infty[$.

ونكتب :

$$f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = \ln(x)$$

2. النهايات :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \ ; \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

3. المشتقة :

$$\forall x \in]0; +\infty[: f'(x) = \frac{1}{x} \implies \forall x \in]0; +\infty[: f'(x) > 0$$

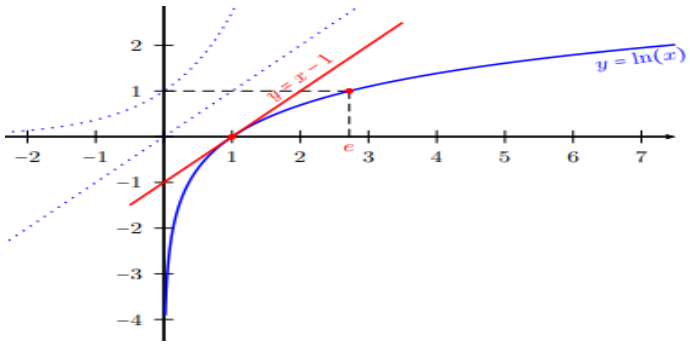
4. جدول التغيرات : يعطى جدول تغيرات الدالة اللوغاريتمية كما يلي

الجدول رقم (1.7): جدول تغيرات الدالة $f(x) = \ln(x)$

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$	
$\ln$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3. منحنى الدالة اللوغاريتمية : يعطى جدول تغيرات الدالة اللوغاريتمية

الشكل رقم (1.7): منحنى الدالة $f(x) = \ln(x)$



IV. نهايات لوغاريتمية شهيرة :

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} x\ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

مثال : اذا كان: $\begin{cases} f(x) = \ln(1+\frac{1}{x})^x \\ g(x) = (1+\frac{1}{x})^x \end{cases}$

- بين أن $f(x) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

الحل :

$$f(x) = \ln(1+\frac{1}{x})^x = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

- لدينا : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$ ، بوضع $h=\frac{1}{x}$ $(x\longrightarrow+\infty\Longrightarrow h\longrightarrow 0)$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$$

$$f(x)=\ln g(x)\Longrightarrow g(x)=e^{f(x)}\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}=e^{1}=e.$$

V. مشتقة الدالة اللوغاريتمية من الشكل : $f(x)=\ln(x)$

تعريف : لتكن f دالة معرفة على المجال I و g دالة موجبة و قابلة للاشتقاق على المجال I اذا كان :

- $f(x)=\ln\big(g(x)\big)\Longrightarrow f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$

مثال :

$$f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\Longrightarrow f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

$$\Longrightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$$

VI. الدالة الاصلية للدالة $f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$

تعريف : اذا كانت f و g دالتان معرفتان على المجال I من $\mathbb{R}$ فانه :

$$\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx=ln|g(x)|+c \qquad ;c\in\mathbb{R}$$

مثال :

- $f(x)=\frac{1}{x}\Longrightarrow\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c.$
- $f(x)=\frac{1}{x+1}\Longrightarrow\int\frac{1}{x+1}dx=\ln|x+1|+c.$
- $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}\Longrightarrow\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\ln|x^2+x+1|+c$

تمارين حول الدالة اللوغاريتمية

التمرين الأول : أوجد مجموعة التعريف ثم حل المعادلات التالية

1) $\ln(x-1)+\ln(x-3)=ln2$

2) $\ln(x+1)=ln\frac{1}{2}$

3) $(\ln x)^2+4lnx+4=0$

4) $\sin(lnx)=1$

5) $\sqrt{\ln(x+1)}=2$

التمرين الثاني : أحسب نهايات الدوال التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)\ln x$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{1+2x}{x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} x^2-2+\ln x$

التمرين الثالث : أحسب مشتقات الدوال التالية :

1) $f(x)=-x^2+\ln x$

2) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

3) $f(x)=\sqrt{\ln(x+1)}$

4) $f(x)=\ln\sqrt{(x^2+1)}$

5) $f(x)=e^x\ln(x^2+1)$

التمرين الرابع *: أحسب التكاملات التالية*

1) $f(x)=\frac{x^3+2x+1}{x}$

2) $f(x)=\frac{1}{3x-5}$

3) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$

4) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

5) $f(x) = x\ln x$

الفصل السابع : الدالة اللوغاريتمية

حلول تمارين الدالة اللوغاريتمية

التمرين الأول:

1) $\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln 2$

$\forall x]3;+\infty[: \ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln 2 \Longrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right)=\ln 2$

$\Longrightarrow \frac{x-1}{x-3}=2 \Longrightarrow 2x-6-x+1=0 \Longrightarrow x=5$

2) $\ln(x+1)=\ln\frac{1}{2}$

$\forall x]-1;+\infty[: (x+1)=\frac{1}{2} \Longrightarrow x=-1/2$

3) $(\ln x)^2+4\ln x+4=0$

$\forall x]0;+\infty[: (\ln x)^2+4\ln x+2=0 \Leftrightarrow y+4y+4=0 \quad (y=\ln x)$

$\Longrightarrow (y+2)^2=0 \Longrightarrow y=-2 \Longrightarrow \ln x=-2$(مستحيل)

لا يوجد حلول للمعادلة $(\ln x)^2+4\ln x+4=0$.

4) $\sin(\ln x)=1$

$\forall x]0;+\infty[: \sin(\ln x)=1 \Longrightarrow \ln x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Longrightarrow x=e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$

5) $\sqrt{\ln(x+1)}=2$

$\forall x]0;+\infty[: \sqrt{\ln(x+1)}=2 \Longrightarrow \ln(x+1)=4 \Longrightarrow x+1=e^4$

$\Longrightarrow x=e^4-1$

التمرين الثاني :

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)\ln x=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{lnx-\ln(1)}{x-1}=1$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

بوضع $(y=\frac{1}{x})$ نجد $((x\longrightarrow+\infty)\Longrightarrow(y\longrightarrow0))$

$$\Longrightarrow\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)-\ln(1+0)}{y-0}=\frac{1}{1+0}=1$$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{1+2x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{x}+2\right)=ln2$

5) $\lim\limits_{x\to0}x^2-2+\ln x=-\infty$

التمرين الثالث :

1) $f(x)=-x^2+\ln x\Longrightarrow f'(x)=-2x+1/x$

2) $f(x)=\frac{\ln x}{x}\Longrightarrow f'(x)=\frac{1}{x}*\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}lnx=\frac{(1-lnx)}{x^2}$

3) $f(x)=\sqrt{\ln(x+1)}\Longrightarrow f'(x)=\frac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$

4) $f(x)=\ln\sqrt{(x^2+1)}\Longrightarrow f'(x)=\frac{\left(\sqrt{(x^2+1)}\right)'}{\sqrt{(x^2+1)}}=\frac{2x}{(x^2+1)}$

5) $f(x)=e^x\ln(x^2+1)\Longrightarrow f'(x)=e^x\ln(x^2+1)+e^x.\frac{2x}{x^2+1}$

$$\Longrightarrow f'(x)=e^x\left(\ln(x^2+1)+\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

التمرين الرابع :

1) $\int f(x)=\frac{x^3+2x+1}{x}dx=\int x^2\,dx+2\int dx+\int\frac{1}{x}dx$

$$=\frac{x^3}{3}+2x+\ln(x)+c$$

2) $\int f(x)=\frac{1}{3x-5}dx=\frac{1}{3}\int\frac{3}{3x-5}dx=\frac{1}{3}ln|3x-5|+c$

3) $\int f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}\int f(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+c$

4) $\int f(x)=\frac{1}{x^2-1}dx=\int\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)}-\frac{\frac{1}{2}}{(x+1)}dx=\frac{1}{2}ln|x-1|-\frac{1}{2}ln|x+1|+c$

5) $\int f(x)=x\ln x dx$

بواسطة التكامل بالتجزئة نضع :

$$u = \ln x \Longrightarrow u' = \frac{1}{x}dx$$

$$v' = x \Longrightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int f(x) = x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$$

التمرين السادس :

1) $\int (x+1)(x^2+2x+1)^4 dx = \int (x+1)(x+1)^{2*4} dx = \int (x+1)^9\, dx$

نضع $y = (x+1)$

$$y = (x+1) \Longrightarrow dy = dx \Longrightarrow \int (x+1)^9\, dx = \int y^9\, dy = \frac{y^{10}}{10} + c$$

$$\Longrightarrow \int (x+1)(x^2+2x+1)^4 dx = \frac{(x+1)^{10}}{10} + c$$

2) $\int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}\, dx$

نضع $y = \cos(x)$

$$y = \cos(x) \Longrightarrow dy = -\sin(x)\, dx$$

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} dx = \int \frac{-dy}{y^3} = \frac{1}{2y^2} + c = \frac{1}{2\cos^2(x)} + c$$

3) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

نضع $y = \ln(x)$

$$y = \ln(x) \Longrightarrow dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int y dy = \frac{y^2}{2} + c$$

4) $\int \frac{2}{3x+2} dx$

نضع $y = 3x + 2$

$$y = 3x + 2 \Longrightarrow dy = 3dx$$

$$\int \frac{2}{3x+2}dx = \frac{2}{3}\int \frac{dy}{y} = \frac{2}{3}lny + c = \frac{2}{3}\ln(3x+2) + c$$

5) $\int xe^{x^2}dx$

بوضع $y = e^{x^2}$

$$y = e^{x^2} \Longrightarrow dy = 2xe^{x^2}dx$$

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int ydy = \frac{y^2}{4} + c = \frac{e^{2x^2}}{4} + c$$

6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{lnx}}$

بوضع $y = \ln x$

$$y = \ln(x) \Longrightarrow dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} + c = 2\sqrt{\ln x} + c$$

التمرين السابع :

1) $\int x^3 \ln x\, dx$

بوضع :

$$u = \ln x \Longrightarrow u' = \frac{1}{x}dx$$

$$v' = x^3dx \Longrightarrow v = \frac{x^4}{4}$$

$$\int x^3 \ln x\, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{16}x^4 + c$$

2) $\int x(x+1)^4\, dx$

بوضع :

$$u = x \Longrightarrow u' = dx$$

$$v' = (x+1)^4 dx \Longrightarrow v = \frac{(x+1)^5}{5}$$

$$\int x(x+1)^4\,dx = x\frac{(x+1)^5}{5} - \int \frac{(x+1)^5}{5}dx = x\frac{(x+1)^5}{5} - \frac{(x+1)^6}{30} + c$$

3) $\int (x^2+1)\,e^x dx$

بوضع :

$$u = x^2 + 1 \Longrightarrow u' = 2xdx$$

$$v' = e^x dx \Longrightarrow v = e^x$$

$$\int (x^2+1)\,e^x dx = (x^2+1)\,e^x - 2\int x e^x dx$$

بمكاملة المقدار $xe^x dx$ بالتجزئة وتعويضه نجد

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

$$\int (x^2+1)\,e^x dx = (x^2+1)\,e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

المراجع

المراجع :

1. **David Brannan (2006) .** A first course in Mathematical Analysis.1st Edition. Combridge University Press.New York .USA.
2. **Benard R Gelbaum ,John M H Olmsted (2003).** Counter examples in Anaysis.1st Edition. Dover publication.New York.USA.
3. **A.E.Bashirov (2014).**Mathematical Analysis Fundamentals.1st Edition .Elsevier. Walthan.USA.
4. **Barle RG, Sherbert Dr (2000).** Introduction to real analysis.3 rd Edition .John Wiley and sons . USA.
5. **Schumacher C (2001) .** Chapter zero :fundamental notions of abstract mathematics.2nd Edition.Addison-Wesley.USA.
6. **Thomson BS, Bruckkner JB,Brucker AM (2001).**Elementary real analysis.Prentice Hall.USA.
7. **Zorich va (2004).** Mathematical analysis II .Springer.USA.
8. **Margit Gémes ,Zoltan Szentmiklossy (2014).** Mathematical Analysis-exercises I . Eotvos lorand University .Faculty of science .Hungaria.
9. **Apostol (1973) .** Mathematical Analysis .2nd Edition .Pasedana.USA.
10. **Anthony W.Knapp (2016) .Basic Real Analysis.** 2nd Edition.East setauket . New York . USA.
11. **Florimond Gueniat ,Vijay Venkatesh (2019) .** Introduction to sequences and series .Birmingham city University .UK.
12. **William F.Trench (2013).** Introduction to Real A nalysis.2nd Edition.Pearson Education.Texas .USA.
13. **Terence Tao (2015) .** Analysis I. 3rd Edidition.springer.los Angelos.USA.
14. **Knut Sydsaeter, Peter J.Hammond (1995).**Mathematics for Economic Analysis,Pearson Education.USA.
15. **Charles C.Pugh (2010).**Real Mathematical Analysis**.**2nd Edition .Springer .California.USA.